Gheorghe IUREA
Adrian ZANOSCHI
Gabriel POPA
Gabriela ZANOSCHI
Ioana ANTON

matematică

aritmetică
geometrie

clasa a V-a

ediția a V-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

CUPRINS

FRACŢII ORDINARE. FRACŢII ZECIMALE

CAPITOLUL IV. FRACŢII ORDINARE

CAPITOLUL V. FRACŢII ZECIMALE

ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI. PUNCTE. DREPTE. PLANE

CAPITOLUL VII. UNGHIURI

CAPITOLUL VIII. UNITĂŢI DE MĂSURĂ

RECAPITULARE FINALĂ

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 5358/01.09.2022.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a V-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : aritmetică, geometrie : clasa a V-a / Gheorghe Iurea, Adrian Zanoschi, Gabriel Popa, ... – Ed. a 5-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4307-0

I. Iurea, Gheorghe
II. Zanoschi, Adrian
III. Popa, Gabriel

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ
EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Piteşti, jud. Argeş, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

TESTE INIȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(2p) **1.** Calculați: $100 + 36 : 9 \cdot 4 - 108$.

(2p) **2.** Zece caiete de același fel costă 40 de lei. Aflați câți lei costă cinci dintre aceste caiete.

(1p) **3.** Calculați perimetrul unui dreptunghi, știind că lățimea sa este de 10 cm, iar lungimea sa este de două ori mai mare decât lățimea.

(1p) **4.** Calculați suma tuturor numerelor naturale de două cifre care au cifra zecilor cu 7 mai mică decât cifra unităților.

(1p) **5.** În fiecare zi dintr-o săptămână, temperatura medie a crescut cu 2°C față de ziua precedentă, iar luni temperatura medie a fost de 6°C. Aflați temperatura medie în ziua de duminică a respectivei săptămâni.

(1p) **6.** Ioana are două cutii, fiecare cu câte 12 biscuiți. Ea împarte, în mod egal, toți biscuiții cu cele două surori ale sale. Cu câți biscuiți rămâne ea?

(1p) **7.** Un vas plin cu zahăr cântărește 450 de grame. Dacă se scoate jumătate din cantitatea de zahăr, vasul și zahărul rămas cântăresc 250 de grame. Aflați câte grame cântărește vasul gol.

TESTUL 2

(2p) **1.** Calculați: $250 - 20 : (13 \cdot 9 + 3 - 118)$.

(2p) **2.** Sfertul jumătății unui număr natural este 74. Aflați numărul.

(1p) **3.** Găsiți cel mai mic număr natural cu suma cifrelor egală cu 10.

(1p) **4.** Bunica lui Mihai a început un tratament în care trebuie să ia, în total, 18 pastile, câte una la fiecare 8 ore. Mihai a socotit că tratamentul va dura exact 6 zile. A calculat el corect durata tratamentului?

(1p) **5.** Andrei avea, la un moment dat, 100 de timbre în colecția lui. Aflați câte timbre va avea el, după ce primește de la mama sa 25 de timbre și de la tatăl său triplul numărului de timbre pe care i le-a dat mama.

(1p) **6.** Aflați câți lei costă 1 kilogram de pere, știind că 2 kilograme de mere și 1 kilogram de pere costă împreună 15 lei, iar 3 kilograme de mere și 2 kilograme de pere costă, în total, 26 de lei.

NUMERE NATURALE

CAPITOLUL I
OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

I.1. SCRIEREA ŞI CITIREA NUMERELOR NATURALE

• Numerele naturale **se scriu** ca o succesiune de unul sau mai multe simboluri numite **cifre arabe**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

O cifră se poate repeta în scrierea unui număr natural, iar prima cifră a oricărui număr natural de cel puţin două cifre este întotdeauna nenulă.

• Acest mod de scriere a unui număr natural se numeşte **sistem zecimal** (sau **scriere în baza zece**), deoarece sunt folosite 10 cifre, iar 10 unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

• Scrierea numerelor naturale în baza zece este una poziţională, întrucât valoarea unei cifre depinde de poziţia ocupată de aceasta.

• Pentru un număr de două cifre folosim notaţia $\overline{ab}$, unde a şi b reprezintă cifre în sistem zecimal, cu $a \neq 0$. Descompunerea numărului $\overline{ab}$ în baza 10 este:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

• Pentru un număr de trei cifre folosim notaţia $\overline{abc}$, unde a, b şi c reprezintă cifre în sistem zecimal, cu $a \neq 0$. Descompunerea numărului $\overline{abc}$ în baza 10 este:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Similar se procedează cu numere de patru sau mai multe cifre.

• Pentru a **citi** un număr natural scris în baza zece, grupăm cifrele numărului respectiv câte trei, de la dreapta la stânga; grupele formate se numesc **clase**. Fiecare clasă este compusă din unităţi, zeci şi sute (de la dreapta la stânga). Denumirile claselor, de la dreapta la stânga, sunt: clasa unităţilor, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor etc. De exemplu, numărul 257 340 198 se citeşte „două sute cincizeci şi şapte de milioane trei sute patruzeci de mii o sută nouăzeci şi opt”, iar tabelul de mai jos evidenţiază poziţia şi denumirea fiecărei cifre.

clasa milioanelor			clasa miilor			clasa unităţilor		
sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi
2	5	7	3	4	0	1	9	8

Probleme rezolvate

1. Răsturnatul numărului natural $\overline{abcd}$, cu $d \neq 0$, este numărul natural $\overline{dcba}$. Aflaţi toate numerele naturale de patru cifre, ştiind că fiecare număr este egal cu răsturnatul său şi suma cifrelor sale este egală cu 6.

Soluţie: Căutăm numerele naturale $\overline{abcd}$ cu $\overline{abcd} = \overline{dcba}$, de unde $a = d$ şi $b = c$. În plus, numerele $\overline{abba}$ au proprietatea că $a + b + b + a = 6$, deci $a + b = 3$. Soluţiile problemei sunt: 1221, 2112 şi 3003.

2. Aflaţi toate numerele naturale de cinci cifre, scrise în baza zece, care au:
- cifra unităţilor cu 3 mai mare decât cifra zecilor;
- cifra miilor egală cu cea mai mare cifră pară;
- cifra sutelor cu 2 mai mică decât cifra unităţilor;
- produsul cifrelor egal cu 0;
- toate cifrele diferite între ele.

Soluţie: Căutăm numerele naturale de forma $\overline{a8bcd}$, cu $d = c + 3$, $b = d - 2$, şi $a \cdot 8 \cdot b \cdot c \cdot d = 0$. Cum $b = c + 1$ şi $d = c + 3$, deducem că $b \neq 0$ şi $d \neq 0$. De asemenea, $a \neq 0$ (cifra de pe prima poziţie), deci este necesar ca $c = 0$, de unde $b = 1$, $d = 3$, iar a poate lua oricare dintre valorile 2, 4, 5, 6, 7, 9. Numerele căutate sunt: 28103, 48103, 58103, 68103, 78103 şi 98103.

Probleme propuse

1. Scrieţi, în baza zece, numerele următoare:

a) douăzeci şi patru; b) nouăsprezece;
c) patru sute cinci; d) opt sute şaisprezece;
e) trei sute treizeci şi trei; f) o mie patru;
g) cinci mii opt sute zece; h) şapte mii trei sute patruzeci şi opt.

2. Scrieţi, în baza zece, numerele următoare:

a) treizeci de mii patru sute treisprezece;
b) cincisprezece mii două sute patruzeci şi trei;
c) şase sute opt mii opt sute şase;
d) patru milioane şase sute şapte mii;
e) treisprezece milioane nouă sute şase mii o sută doi;
f) nouă sute de milioane nouă sute nouă.

3. Citiţi numerele naturale de mai jos:

a) 7; b) 19; c) 43; d) 109; e) 310; f) 925.

4. Citiţi următoarele numere naturale:

a) 1307; b) 93 002; c) 27 413; d) 123 321; e) 4 309 005; f) 28 008 200.

5. Aflaţi toate numerele naturale de două cifre, având cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor.

6. Scrieţi cinci numere naturale, având suma cifrelor egală cu 2.

7. Scrieţi cinci numere naturale impare, diferite de 21, având suma cifrelor egală cu 3.

8. Descompuneţi, în baza 10, numerele naturale:
a) 27; b) 135; c) 9148; d) 12043.

9. Descompuneţi, în baza 10, numerele naturale de mai jos şi efectuaţi calculele, acolo unde este posibil:
a) $\overline{aa}$; b) $\overline{abab}$; c) $\overline{x0yx}$; d) $\overline{xyyx}$; e) $\overline{2a3a1}$; f) $\overline{1bb20}$.

10. Scrieţi numerele naturale care au următoarea descompunere în baza 10:
a) $3 \cdot 10 + 5$; b) $4 \cdot 100 + 7$;
c) $9 \cdot 100 + 3 \cdot 10$; d) $5 \cdot 10000 + 7 \cdot 100 + 1$;
e) $4 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$; f) $17 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 9$.

11. Scrieţi toate numerele naturale de două cifre, formate din cifre pare distincte.

12. a) Scrieţi toate numerele naturale de două cifre, care se pot forma cu cifrele 1, 2 şi 3.
b) Scrieţi toate numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifrele 7, 8 şi 9.

13. Scrieţi toate numerele naturale de trei cifre, cu exact două cifre egale, care se pot forma cu cifrele 0, 1 şi 2.

14. Determinaţi numerele naturale de trei cifre, formate din trei cifre distincte, având diferenţa dintre cifra sutelor şi cifra unităţilor egală cu 8.

15. Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condiţiile:
a) cifra sutelor este cea mai mică cifră pară;
b) cifra unităţilor este cea mai mare cifră impară;
c) cifra miilor este de două ori mai mică decât cifra zecilor.

16. Determinaţi numerele naturale de patru cifre, care au cifra miilor egală cu 6, cifra sutelor egală cu suma dintre cifra zecilor şi cifra unităţilor, iar cifra zecilor depăşeşte cifra miilor.

17. Scrieţi răsturnatul fiecăruia dintre numerele naturale: 12, 371, 1238, 20104, 111333, 710017.

18. Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = \overline{cba}$ şi $a + b + c = 4$.

19. Găsiţi corespondenţa dintre cele două coloane de mai jos.

1. Număr natural cu cifra sutelor minimă, nenulă.	A. 98010
2. Număr natural cu cifra zecilor de mii egală cu cifra zecilor.	B. 98170
3. Număr natural cu suma cifrelor minimă.	C. 99018
4. Număr natural cu toate cifrele nenule.	D. 96009
5. Număr natural cu cifra miilor cu 6 mai mare decât cifra sutelor.	E. 97093
6. Număr natural cu cifra unităţilor maximă, pară.	F. 97217

20. Aflaţi câte numere naturale cuprinse între 432 şi 531 conţin, în scrierea lor, cifra 3.

11. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $53_{(x)} = 38_{(10)}$; b) $43_{(x)} + 31_{(x)} = 39_{(10)}$.

12. Câte numere scrise în baza 2 au şase cifre?

13. Scrieţi numărul 202 ca o sumă de puteri cu baza 2, având exponenţi diferiţi.

14. Determinaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{2abc} + \overline{abc7} = 10312$.

15. O bunică are doi nepoţi. Vârsta bunicii este un număr de două cifre cu proprietatea că prima cifră reprezintă vârsta unui nepot, iar a doua cifră este vârsta celuilalt nepot. Aflaţi vârsta bunicii şi a nepoţilor săi, ştiind că suma vârstelor celor trei este 89.

16. Determinaţi toate numerele naturale de două cifre care împărţite la suma cifrelor lor dau câtul 7 şi restul 6.

17. Determinaţi cifrele nenule *a*, *b*, *x*, *y*, *z*, ştiind că $\overline{xyz} = \overline{ab} + 22$ şi $\overline{zyx} = \overline{ab} + 814$.

18. Fie cifrele nenule *a*, *b*, *c*, *d*, *x*, *y*, *z*, *t*, astfel încât $\overline{ay} + \overline{xb} = 73$ şi $\overline{cd} + \overline{zt} = 37$. Calculaţi $\overline{abcd} + \overline{xyzt}$.

19. Stabiliţi dacă există numere naturale de trei cifre $\overline{abc}$, astfel încât $\overline{abc} = a \cdot \overline{bc}$.

20. Se consideră şirul: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, …, format din toate numerele care se pot scrie doar cu cifrele 0 şi 1, ordonate crescător. Determinaţi termenul şirului care se află pe poziţia 100.

I.12. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR CU NUMERE NATURALE. UTILIZAREA PARANTEZELOR ROTUNDE, PĂTRATE, ACOLADE

• În rezolvarea unui exerciţiu care conţine mai multe operaţii aritmetice, precum şi diferite paranteze (rotunde, pătrate, acolade), trebuie să respectăm ordinea efectuării operaţiilor şi ordinea efectuării parantezelor.

• **Ordinea efectuării operaţiilor** este:
1) ridicarea la putere (operaţie de ordinul al treilea);
2) înmulţirea şi împărţirea (operaţii de ordinul al doilea);
3) adunarea şi scăderea (operaţii de ordinul întâi).

• **Ordinea efectuării parantezelor** se bazează pe faptul că întâi se rezolvă operaţiile din parantezele rotunde; când acestea sunt finalizate, parantezele pătrate devin paranteze rotunde, iar acoladele devin paranteze pătrate. Acest procedeu se repetă până la eliminarea tuturor parantezelor.

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculaţi $14 + 5 \cdot \{11 + 3 \cdot [2 \cdot 3^3 - (18 + 14 : 2) : 5] - 2^7\}$.

Soluție: $14 + 5 \cdot \{11 + 3 \cdot [2 \cdot 3^3 - (18 + 14 : 2) : 5] - 2^7\} = 14 + 5 \cdot \{11 + 3 \cdot [2 \cdot 3^3 - (18 + 7) :$ $: 5] - 2^7\} = 14 + 5 \cdot [11 + 3 \cdot (2 \cdot 3^3 - 25 : 5) - 2^7] = 14 + 5 \cdot [11 + 3 \cdot (2 \cdot 27 - 25 : 5) - 2^7] =$ $= 14 + 5 \cdot [11 + 3 \cdot (54 - 5) - 2^7] = 14 + 5 \cdot (11 + 3 \cdot 49 - 2^7) = 14 + 5 \cdot (11 + 3 \cdot 49 - 128) =$ $= 14 + 5 \cdot (11 + 147 - 128) = 14 + 5 \cdot (158 - 128) = 14 + 5 \cdot 30 = 14 + 150 = 164.$

2. Aflați numărul natural x din egalitatea $[2^3 \cdot (32 + 2 \cdot 3^2) : 5^2 + 2^4] : x = (2^5)^{20} : 4^{7^2}$.
Soluție: Egalitatea se rescrie, echivalent, astfel: $[2^3 \cdot (32 + 2 \cdot 9) : 25 + 2^4] : x = 2^{100} : 4^{49} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [2^3 \cdot (32 + 18) : 25 + 2^4] : x = 2^{100} : (2^2)^{49} \Leftrightarrow (2^3 \cdot 50 : 25 + 2^4) : x = 2^{100} : 2^{98} \Leftrightarrow (2^3 \cdot 2 + 2^4) : x =$ $= 2^2 \Leftrightarrow 2^5 : x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2^5 : 2^2 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8.$

Probleme propuse

1. Calculați:
a) $17 \cdot 21 + 17 \cdot 25 - 17 \cdot 37$;
b) $[(49 \cdot 12 + 49 \cdot 15) : 9 + 49 \cdot 7] : 10 + 49$;
c) $\{[57 \cdot 28 - 57 \cdot (24 : 2 + 57 - 9 \cdot 6)] : 13 - 7\} : 2$;
d) $299 : 13 - 260 : 13 + 39 \cdot (18 - 4 \cdot 2)$.

2. Calculați:
a) $9 - 8 + 7 \cdot [6 \cdot 5 - 4 \cdot (3 + 2) - 1] : 9$;
b) $98 - 2 \cdot \{72 - 4 \cdot [48 - 6 \cdot (21 : 7 + 36 : 12)]\}$;
c) $121 - 21 \cdot 5 + 336 : [270 - 37 \cdot (256 : 128 + 576 : 144)]$;
d) $1510 - 5 \cdot (9600 : 30 - 15 \cdot 54 : 9) + 630$.

3. Calculați:
a) $15 - 5 \cdot 2 + 8 : 4$;
b) $[63 : (1 + 2 \cdot 2 + 4 : 2) - 4 \cdot 2] \cdot 7 - 5$;
c) $9 \cdot 6 - 2 \cdot [(11 + 7 \cdot 3) : 2^3 + 3^2]$;
d) $\{15 \cdot 4 + 15 \cdot 16 - 20 \cdot [(5^2 - 3^2 + 2^3) : 8 - 2]\} : 10$.

4. Calculați:
a) $[(1^3 + 3^2 - 2^3) \cdot 5^2 - 7^2] \cdot 8^2 - 2^6$;
b) $(18^3 : 18^2 - 17^4 : 17^3 + 15 : 5) \cdot 2^2 - 3^2$;
c) $\{[(2^{10} \cdot 9^7) : (2^5 \cdot 3^6)^2 + 28^0] : 5\}^5$;
d) $742 - 3^2 \cdot \{446 - 2^3 \cdot [271 - 5^2 \cdot (3^7 \cdot 3^8 : 3^{10} : 3^3)]\}$.

5. Calculați:
a) $10^2 - (5^2 \cdot 5 - 6 \cdot 7 + 17 \cdot 7^0) : 10 \cdot 3^2$;
b) $\{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 4^5 : 2^4 - (2^2)^2]\} : 3^2 + 10^0 - 0^{10}$;
c) $(25^3)^4 : (3^2 + 4^2)^{10} - 0^3 \cdot 3^0 + (4 \cdot 6)^2 - 5^{2^2}$;
d) $81^5 : 3^{19} \cdot 3^2 - 3^2 + 27^2 \cdot 3^{27} : 81^6 : 9^3$.

6. Calculați:

a) $(2 + 4 + 6 + \ldots + 120) : (1 + 2 + 3 + \ldots + 60)$;

b) $[(4 + 8 + 12 + \ldots + 100) : (1 + 2 + 3 + \ldots + 25) : 2^2]^{371}$.

7. Calculați:

a) $(3x + 4x - 2x) : x$;

b) $[5 \cdot (3x + 7x) - 3 \cdot (5x + 4x)] : 23 + 2x$;

c) $21x - \{3x + [2x + (4x + 2x) \cdot 3] : 5\} : 7$.

8. Aflați numărul natural n din egalitățile de mai jos:

a) $49 - n + 40 : 5 + 13 = 10$;

b) $[(n + 138 : 6) \cdot 9] : 6 = 102$;

c) $(540 : 6 + n) \cdot 7 - 100 = 600$.

9. Aflați valoarea naturală a numărului a din egalitățile:

a) $100 - [36 + 6 \cdot 9 - (a : 3 + 15)] : 3 = 76$;

b) $100 \cdot 3 - [62 \cdot (8 + 17 : 17 - 23 : 23)] : 4 : a = 238$;

c) $(123 : 3 + 362 : 2 - 64 \cdot 3 + a) \cdot 7 = 448 : 8 \cdot 10$.

10. Aflați numărul natural b din egalitatea:

$$4536 - [536 + 9 \cdot 43 - (2b + 6 \cdot 8 - 5 \cdot 7)] = 1936 : 4 \cdot 8.$$

11. Aflați numărul natural nenul x din egalitatea:

$$\{[(1 \cdot 1 + 2 : 2 + 3 \cdot 3) \cdot 4 : 4 + 5 \cdot 5] : x + 7 : 7\} \cdot 8 = 9 \cdot 9 - 5 \cdot 5.$$

12. Aflați numărul natural nenul y din egalitatea:

$$2021 : \{2021 - [2021 - 22 : (20 : y + 21)]\} = 2021.$$

13. Aflați numărul natural a din egalitatea $\left[(2^3)^4 : (2^2)^5 + 2^2\right] : a + 1 = 2^3 + 2^0$.

14. Aflați cifra a, în baza 10, din egalitatea $\overline{aaa} + 2 \cdot \overline{aa} - 3 \cdot a = 910$.

15. Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\overline{ab}$ este egal cu jumătate din suma dintre răsturnatul său și numărul 80.

16. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ care verifică egalitatea $3 \cdot \overline{ab} = \overline{a1} + \overline{b7} + 17$.

17. Aflați cifrele a, b și c, în baza 10, astfel încât $\overline{abc} + \overline{abc} \cdot 9 + 2 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot c = 1046$.

18. Aflați cifrele a și b, în baza 10, care verifică egalitatea:

$$\left(2 \cdot \overline{ab} - 3 \cdot \overline{ba}\right) \cdot 11 = \left(\overline{aab} - b\right) : 50.$$

19. Monica dorește să cumpere un buchet de trandafiri. Dacă ar cumpăra cu 2 trandafiri în plus față de numărul stabilit inițial, ea ar plăti 171 lei. Dacă ar rămâne la numărul inițial de trandafiri, dar ar alege un alt magazin, unde prețul unui trandafir este de trei ori mai mare decât cel inițial, atunci suma de plată ar fi de 459 lei. Determinați cât va plăti Monica dacă revine la planul inițial.

20. Împărţind suma a trei numere consecutive la 8, obţinem câtul 11 şi restul 5. Aflaţi cele trei numere.

21. La cel mai mare cub perfect de două cifre se adaugă jumătatea celui mai mic pătrat perfect de trei cifre, iar rezultatul obţinut se înmulţeşte cu 7. Noul rezultat se împarte exact la un număr natural nenul, câtul obţinut fiind 133. Aflaţi împărţitorul.

22. Maria şi Daniel au împreună, în prezent, 26 de ani. În urmă cu trei ani, vârsta Mariei era de trei ori mai mare decât vârsta lui Daniel. Aflaţi peste câţi ani vârsta Mariei va fi dublul vârstei lui Daniel.

23. Patru eleve au de rezolvat 69 de exerciţii. Cristina rezolvă de trei ori mai multe exerciţii decât Corina, Cătălina rezolvă de trei ori mai puţine exerciţii decât Corina, iar Carmen rezolvă cât Cristina şi Cătălina la un loc. Aflaţi câte exerciţii a rezolvat fiecare fată.

24. Comparaţi numerele naturale:

$$a = 27^{40} \text{ şi } b = [(3^3 + 3^4 - 6 \cdot 3) : (2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3)]^{123}.$$

25. Determinaţi numărul natural n din egalitatea:

$$(15 \cdot 3^{n+2} \cdot 7^n - 8 \cdot 3^n \cdot 7^{n+1}) : 79 = 441.$$

Recapitulare şi sistematizare prin teste

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(2p) **1.** Calculaţi:

a) $2^3 + 4^0 - 3^2$; **b)** $(8^2 + 15^2) : 17^2$;

c) $(2 \cdot 2^5 \cdot 2^{15}) : 2^{18}$; **d)** $(3^7)^8 : 3^{54}$.

(2p) **2.** Calculaţi:

a) $50 - 40 : [11 - (256 + 44) : 100]$;

b) $3 \cdot 16 + \{7 \cdot [6 - (4 + 2 \cdot 3) : 5] - 8\} : 10$.

(1p) **3.** Determinaţi ultima cifră a numărului 2^{11}.

(1p) **4.** Comparaţi numerele:

a) $x = 2^{60}$ şi $y = 3^{61}$; **b)** $x = 8^{20}$ şi $y = 2^{59}$.

(1p) **5.** Determinaţi numărul natural n, ştiind că $2^n + 2^n = 2^{32}$.

(1p) **6.** Determinaţi numărul natural x, dacă $1011_{(2)} + 110111_{(2)} = x_{(10)}$.

(1p) **7.** Arătaţi că numărul $a = 20 \cdot [441 : 21^2 + 2 \cdot (2^{60} \cdot 3^{20}) : (2^{59} \cdot 3^{20})]$ este pătrat perfect.

CAPITOLUL II
METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

II.1. METODA REDUCERII LA UNITATE

PROBLEME REZOLVATE

1. Mergând cu viteză constantă, un autoturism parcurge 300 km în 5 ore.

a) Câţi kilometri va parcurge autoturismul în 3 ore?

b) Câte ore sunt necesare pentru un drum de 420 km?

Soluţie: Distanţa parcursă de autoturism creşte/scade în acelaşi ritm cu mărirea/micşorarea timpului de deplasare: timp mai mare, distanţă mai mare; timp mai mic, distanţă mai mică. Distanţa străbătută într-o oră (adică într-un timp ce cinci ori mai scurt) va fi, aşadar, de cinci ori mai mică:

5 ore .... 300 km

1 oră .... $300 : 5 = 60$ km

a) În 3 ore, autoturismul va parcurge $60 \cdot 3 = 180$ km.

b) Pentru a acoperi un drum de 420 km, e nevoie de $420 : 60 = 7$ ore.

2. Patru tractoare termină de arat un teren în şase zile.

a) În câte zile ar ara terenul trei tractoare?

b) De câte tractoare ar fi nevoie pentru a termina treaba în patru zile?

Soluţie: Timpul necesar lucrării creşte/scade în acelaşi ritm cu micşorarea/mărirea numărului de tractoare: tractoare mai puţine, zile mai multe; tractoare mai multe, zile mai puţine. Aşadar, un tractor ar ara întregul teren într-un timp de patru ori mai mare decât cele patru tractoare din problemă:

4 tractoare .... 6 zile

1 tractor .... $6 \cdot 4 = 24$ zile

a) 3 tractoare ar termina treaba în $24 : 3 = 8$ zile.

b) Pentru a termina în 4 zile, ar fi nevoie de $24 : 4 = 6$ tractoare.

3. a) O cadă de 120 de litri este alimentată de două robinete. Primul robinet poate umple cada în 20 de minute, iar al doilea robinet în 30 de minute. În cât timp ar umple cada, împreună, cele două robinete?

b) Aceeaşi întrebare, în cazul în care cada are 131 de litri.

Soluţie: a) Într-un minut, primul robinet aduce în cadă $120 : 20 = 6$ litri de apă, iar cel de-al doilea $120 : 30 = 4$ litri. Împreună, cele două aduc în cadă $6 + 4 = 10$ litri de apă, aşadar vor umple cada în $120 : 10 = 12$ minute.

b) În condiţiile problemei, cada se va umple în 12 minute, indiferent ce capacitate are; raţionamentul precedent conduce, însă, la calcule urâcioase. Gândim în felul următor: într-o oră (adică 60 de minute), primul robinet umple 60 : 20 = 3 căzi, iar cel de-al doilea 60 : 30 = 2 căzi. Împreună, în 60 de minute, vor umple 5 căzi, aşadar o cadă va fi umplută în 60 : 5 = 12 minute.
Am ales ca unitate o perioadă de timp care se împarte atât într-un număr întreg de intervale de 30 de minute, cât şi într-un număr întreg de intervale de 20 de minute. În acest caz, „reducere" e doar un fel de-a spune!

PROBLEME PROPUSE

1. Pentru a confecţiona 4 bluze este nevoie de 8 metri de pânză.
   a) Câţi metri de pânză trebuie pentru a face 5 bluze?
   b) Câte bluze se vor confecţiona din 12 metri de pânză?

2. Ioana rezolvă 42 de probleme în 7 zile.
   a) Câte probleme va rezolva Ioana în 10 zile?
   b) De câte zile are nevoie pentru a rezolva 30 de probleme?

3. Din 75 de litri de lapte se obţin 3 kg de unt.
   a) Câţi litri de lapte trebuie pentru 5 kg de unt?
   b) Câte kilograme de unt se obţin din 200 de litri de lapte?

4. Bunica fierbe prune într-o oală pentru a face magiun. În tabelul de mai jos este descrisă corespondenţa dintre cantitatea de prune şi numărul borcanelor de magiun obţinute. Completaţi spaţiile libere din tabel.

	A	B	C	D	E
Cantitate de prune (kg)			6	12	15
Număr borcane de magiun	2	6	4		

5. Bunicul doreşte să pună murături; el merge la piaţă, pentru a cumpăra 20 kg de gogonele. La o tarabă vede un carton care arată preţul, ca în desenul alăturat. Câţi lei va cheltui bunicul pe gogonele?

GOGONELE
1 kg → 5 lei
5 kg → 20 lei

6. Tata vrea să taie un trunchi de copac în butuci, pentru a putea depozita mai uşor lemnul de foc pentru iarnă. El observă că, dacă face cinci tăieturi, obţine 6 butuci. Câţi butuci va obţine dacă face zece tăieturi?

7. Zece muncitori termină o lucrare în 12 zile.
   a) În câte zile vor termina lucrarea şase muncitori?
   b) De câţi muncitori ar fi nevoie dacă lucrarea trebuie terminată în 3 zile?

8. Un bazin poate fi umplut de mai multe robinete având acelaşi debit. În tabelul de mai jos este descrisă corespondenţa dintre numărul de robinete şi timpul de umplere a bazinului. Completaţi spaţiile libere din tabel.

	A	B	C	D	E
Număr robinete			24	36	48
Timpul de umplere (ore)	16	12		4	

9. Şase copii mănâncă toate prăjiturile de pe un platou în şase minute. În câte minute ar termina prăjiturile nouă copii?

10. Un cor format din 60 de cântăreţi interpretează un imn în 5 minute. În cât timp va interpreta acelaşi imn un cor format din 100 de cântăreţi?

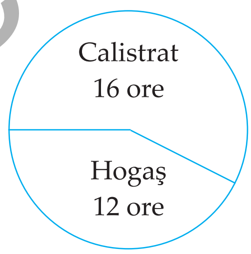
11. Doi cai termină tot fânul din iesle într-o oră. În cât timp ar termina fânul trei cai?

12. Un cal termină fânul din iesle în două ore, iar un mânz în cinci ore. În cât timp ar termina fânul din iesle doi cai şi un mânz?

13. Pentru a ara un teren având forma unui pătrat cu latura de 200 de metri, un tractorist primeşte 1800 de lei. Ce sumă va primi atunci când va ara un teren având forma unui pătrat cu latura de 300 de metri?

14. Pentru a însămânţa un teren cu suprafaţa de 18 hectare, 9 utilaje lucrează timp de 4 zile. De câte utilaje e nevoie pentru a însămânţa o suprafaţă de 28 de hectare în 7 zile?

15. Calistrat şi Hogaş, doi meşteri la fel de harnici şi de pricepuţi, termină împreună o lucrare. În diagrama alăturată se vede cât timp a muncit fiecare. Cei doi primesc, pentru toată treaba, 875 de lei. Cum vor împărţi între ei această sumă?



II.2. Metoda comparaţiei

Probleme rezolvate

1. Dorind să cumpere un buchet de flori, Bianca observă că pentru 3 lalele şi 6 narcise ar plăti 39 lei, iar pentru 6 lalele şi 6 narcise ar plăti 54 lei.

a) Aflaţi preţul unei lalele şi preţul unei narcise.

b) Calculaţi câţi lei trebuie să plătească Bianca pentru 7 lalele şi 4 narcise.

Soluţie: 3 lalele .... 6 narcise ....39 lei

6 lalele .... 6 narcise ....54 lei

a) Observăm că diferenţa de 54 – 39 = 15 lei se datorează diferenţei dintre numerele lalelelor. Aşadar, 6 – 3 = 3 lalele costă 15 lei, aşadar preţul unei lalele este de 15 : 3 = = 5 lei. Raportându-ne la prima situaţie, obţinem că 6 narcise costă 39 – 15 = 24 lei, deci preţul unei narcise este de 24 : 6 = 4 lei.

b) Suma necesară pentru a cumpăra 7 lalele şi 4 narcise este de $7 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 51$ lei.

CAPITOLUL III
DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

III.1. DIVIZOR. MULTIPLU. DIVIZORI COMUNI. MULTIPLI COMUNI

1. Fie a şi b două numere naturale. Spunem că ***a* este divizibil cu *b*** sau că ***b* îl divide pe *a*** dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. În acest caz, notăm $b \mid a$ (b divide pe a) sau $a \vdots b$ (a este divizibil cu b).

Dacă a este divizibil cu b, spunem că a este un **multiplu** al lui b, iar b este un **divizor** al lui a.

Dacă b este diferit de 0, atunci a este divizibil cu b dacă şi numai dacă restul împărţirii lui a la b este 0 (a se împarte exact la b).

Dacă a nu este divizibil cu b, notăm $b \nmid a$ sau $a \not\vdots\, b$.

Exemple: $2 \mid 12$, $3 \mid 63$, $13 \mid 39$, $29 \mid 0$, $0 \nmid 14$, $15 \nmid 35$.

2. Singurul număr natural care are o infinitate de divizori este 0 şi singurul număr natural care are un singur divizor este 1.

3. Orice număr natural diferit de 1 are cel puţin doi divizori: 1 şi numărul însuşi. Aceştia se numesc **divizorii improprii** ai numărului, iar ceilalţi divizori, dacă există, se numesc **divizori proprii**.

Exemple: 1 şi 18 sunt divizorii improprii, iar 2, 3, 6 şi 9 sunt divizorii proprii ai numărului 18.

4. Considerăm numerele naturale 12 şi 18.

Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 şi 12, iar divizorii lui 18 sunt: 1, 2, 3, 6, 9 şi 18.

Divizorii comuni ai numerelor 12 şi 18 sunt: 1, 2, 3 şi 6. Observăm că toţi aceşti divizori comuni sunt divizorii celui mai mare dintre ei, adică ai lui 6.

Multiplii lui 12 sunt: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, …, iar multiplii lui 18 sunt: 0, 18, 36, 54, 72, 90, … .

Multiplii comuni ai numerelor 12 şi 18 sunt: 0, 36, 72, 108, 144, … . Există o infinitate de multipli comuni, dar toţi sunt multiplii celui mai mic dintre ei care este diferit de 0, adică ai lui 36.

PROBLEME REZOLVATE

1. Arătaţi că, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$, numărul $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n-3} \cdot 5^4$ este divizibil cu 313.

Soluţie: Deoarece $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n+1} = 5^{n+1}(2 + 3 \cdot 5^4 + 1) = 5^{n+1} \cdot 1878 = 5^{n+1} \cdot 313 \cdot 6$, rezultă că a este divizibil cu 313.

2. Trei autobuze pleacă la ora 7 din garaj şi se întorc astfel: primul peste 2 ore şi 10 minute şi pleacă din nou pe traseu peste 20 de minute, al doilea se întoarce după 1 oră şi 48 de minute şi pleacă din nou peste 12 minute, iar al treilea vine peste 1 oră şi 36 de minute şi pleacă din nou peste 4 minute. Care este următoarea oră la care cele trei autobuze vor pleca din nou în acelaşi timp din garaj?

Soluţie: Cele trei autobuze pleacă din garaj astfel: primul din 150 în 150 de minute, al doilea din 120 în 120 de minute, iar al treilea din 100 în 100 de minute. Dacă cele trei autobuze pleacă din nou împreună din garaj după x minute (de la ora 7), atunci x este un multiplu comun al numerelor 150, 120 şi 100, deci x poate fi 600, 1200 etc. Deci, următoarea oră la care cele trei autobuze vor pleca din nou în acelaşi timp este ora 17 $(7 + 10)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Arătaţi că:
a) 46 se divide cu 2;
b) 1659 se divide cu 7;
c) 5151 se divide cu 17;
d) 1991 se divide cu 11;
e) 95 nu se divide cu 3;
f) 2297 nu se divide cu 28.

2. Arătaţi că:
a) 54 este un divizor al numărului 1566;
b) 1692 este un multiplu al numărului 47;
c) 31 nu este un divizor al numărului 962;
d) 245 nu este un multiplu al numărului 15.

3. Arătaţi că:
a) $18 \mid 3060$;
b) $308 \vdots 77$;
c) 35 divide pe 630;
d) 2285 se divide cu 457;
e) 97 este un divizor al numărului 4656;
f) 140 este un multiplu al numărului 28.

4. Scrieţi toţi divizorii următoarelor numere naturale:
a) 13; b) 18; c) 24; d) 36.

5. Scrieţi toate numerele naturale nenule mai mici decât 100 care îndeplinesc proprietatea:
a) se divid cu 12;
b) se divid cu 18;
c) se divid cu 18, dar nu se divid cu 12;
d) se divid cu 12, dar nu se divid cu 18;
e) se divid cu 12 sau se divid cu 18;
f) se divid cu 12 şi cu 18.

6. Determinaţi toate numerele naturale divizibile cu 53, cuprinse între 300 şi 500.

7. Câte numere de două cifre sunt divizibile cu 12? Calculaţi suma acestor numere.

8. a) Scrieţi toţi multiplii numărului 13 care sunt mai mici decât 65.
b) Scrieţi toţi multiplii numărului 17 care sunt cel puţin egali cu 85 şi cel mult egali cu 170.

9. a) Aflaţi cel mai mare multiplu al numărului 9 care este mai mic decât 89.
b) Determinaţi cel mai mic multiplu al numărului 16 care este mai mare decât 272.

10. a) Determinaţi cel mai mare număr natural de trei cifre care este divizibil cu 34.
b) Determinaţi cel mai mic număr natural de patru cifre care este un multiplu al numărului 29.

11. Determinaţi toate numerele naturale de patru cifre, $\overline{abcd}$, ştiind că $\overline{ab}$ $(a \neq 0)$ este un multiplu al lui 34, iar $\overline{cd}$ $(c \neq 0)$ se divide cu 43.

12. Demonstraţi că, pentru orice număr natural n, numărul $a = 121n + 132$ este divizibil cu 11.

13. Arătaţi că numărul $a = 52n + 26m + 39$ se divide cu 13, oricare ar fi numerele naturale m şi n.

14. Determinaţi toate numerele de două cifre care împărţite la 23 dau restul egal cu 12.

15. Câte numere de trei cifre au proprietatea că împărţite la 47 dau câtul egal cu restul?

16. Arătaţi că nu există niciun număr natural n, astfel încât numărul $2n + 6$ să dividă numărul 71.

17. Arătaţi că nu există niciun număr natural n, astfel încât numărul $2n + 1$ să se dividă cu 18.

18. Determinaţi patru numere naturale impare consecutive, ştiind că suma lor este mai mică decât 100 şi se divide cu 11.

19. Demonstraţi că suma oricăror şapte numere naturale consecutive se divide cu 7.

20. Demonstraţi că numărul $a = 2^{25} - 5 \cdot 2^{20} - 2^{22}$ se divide cu 23.

21. Arătaţi că, pentru orice număr natural n, numărul $a = 2^{2n+3} \cdot 25^n - 4^n \cdot 5^{2n}$ este divizibil cu 7.

22. Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi că numărul $a = 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 17 \cdot 15^n$ se divide cu 2, 3, 4, 5, 6 şi 7.

23. Demonstraţi că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 7.

24. Demonstraţi că, dacă $4 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$, atunci numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 13.

25. Demonstraţi că toate numerele de forma $\overline{abcabc}$ se divid cu 7, cu 11 şi cu 13.

26. Demonstraţi că, dacă 4 divide suma $a + c$, atunci 4 divide şi suma $\overline{abc} + \overline{cba}$.

27. Demonstraţi că:
a) 8 divide numărul $a = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{21}$;
b) 7 divide numărul $b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{32}$;
c) 40 divide numărul $c = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{43}$.

28. Scrieţi toţi divizorii comuni pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere naturale:

a) 8 şi 12; b) 15 şi 24; c) 16 şi 27;
d) 13 şi 72; e) 30 şi 45; f) 24 şi 36.

29. Determinaţi cel mai mare dintre divizorii comuni pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere naturale:

a) 8 şi 20; b) 12 şi 18; c) 9 şi 32;
d) 19 şi 20; e) 30 şi 75; f) 72 şi 144.

30. Andrei a primit cadou de ziua lui un clasor pentru timbre. El a observat că în clasor ar putea aşeza 150 de timbre, punând număr egal de timbre pe fiecare pagină, dar ar putea pune chiar şi 200 de timbre, tot cu număr egal de timbre pe fiecare pagină. Aflaţi numărul maxim de pagini pe care le poate avea clasorul lui Andrei.

31. Într-o zi, toţi nepoţii bunicii s-au adunat în grădina ei. Bunica a cules 24 de mere şi 40 de caise, pe care le-a împărţit în mod egal nepoţilor săi (fiecare dintre ei a primit acelaşi număr de mere şi acelaşi număr de caise).

a) Este posibil ca bunica să aibă şase nepoţi?
b) Aflaţi numărul maxim de nepoţi pe care îl poate avea bunica.

32. Dana împarte 75 de creioane, 50 de pixuri şi 125 de bomboane în mai multe pachete identice (fiecare pachet are acelaşi număr de creioane, acelaşi număr de pixuri şi acelaşi număr de bomboane). Determinaţi numărul maxim de astfel de pachete şi conţinutul unui pachet în acest caz.

33. Determinaţi toţi multiplii comuni mai mici decât 100 pentru fiecare dintre următoarele numere naturale:

a) 6 şi 12; b) 4 şi 9; c) 10 şi 15;
d) 12 şi 18; e) 2, 3 şi 5; f) 2, 4 şi 5.

34. Fie m un multiplu comun al numerelor naturale a şi b. Determinaţi m în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $a = 6$, $b = 15$, $0 < m < 100$;
b) $a = 20$, $b = 70$, $m \neq 0$, $m \leq 280$;
c) $a = 28$, $b = 14$, $m \neq 0$, m este minim;
d) $a = 75$, $b = 50$, $m \neq 0$, m este minim.

35. Membrii unui club sportiv îşi fac exerciţiile zilnice de gimnastică aşezaţi într-o formaţie cu mai multe rânduri egale. Niciunul dintre membri nu lipseşte niciodată de la antrenamente. În unele zile, rândurile au câte 9 sportivi, iar în alte zile rândurile sunt formate din câte 12 sportivi. Aflaţi numărul minim de sportivi înscrişi în acest club.

CAPITOLUL IV
FRACŢII ORDINARE

IV.1. Fracţii ordinare. Fracţii subunitare, echiunitare, supraunitare. Procente

• Se numeşte **unitate fracţionară** o parte dintr-un întreg care a fost împărţit în părţi de mărimi egale.
• Se numeşte **fracţie** sau **raport** una sau mai multe unităţi fracţionare.
• Notăm fracţia:

$\frac{a}{b}$
- a → **numărător** (indică numărul de unităţi fracţionare)
- — → **linie de fracţie**
- b → **numitor** (indică în câte părţi de mărimi egale a fost divizat întregul)

• Se numeşte **raport procentual** sau **procent** fracţia $\frac{p}{100}$, care se scrie şi sub forma $p\%$ (p la sută).
• Clasificarea fracţiilor:
– fracţie subunitară (numărător < numitor); exemple: $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}$;
– fracţie echiunitară (numărător = numitor); exemple: $\frac{4}{4}, \frac{8}{8}$;
– fracţie supraunitară (numărător > numitor); exemple: $\frac{11}{5}, \frac{29}{6}$.

Probleme rezolvate

1. Scrieţi fracţiile de forma $\frac{\overline{a1}}{\overline{b7}}$, unde $\overline{a1}$ este un număr natural pătrat perfect, iar $\overline{b7}$ este un număr prim de două cifre.

Soluţie: $\overline{a1} = 81$, $\overline{b7}$ poate lua valorile 17, 37, 47, 67, 97.
Sunt cinci fracţii: $\frac{81}{17}, \frac{81}{37}, \frac{81}{47}, \frac{81}{67}, \frac{81}{97}$.

2. Fie şirul de fracţii $\frac{1}{999}, \frac{2}{998}, \frac{3}{997}, \ldots, \frac{999}{1}$.
a) Câte fracţii sunt în şir?
b) Care este numărul fracţiilor subunitare?

c) Conţine acest şir fracţii echiunitare?

d) Câte fracţii supraunitare sunt?

Soluţie: a) 999 de fracţii (regula este ca suma dintre numărător şi numitor să fie 1000).

b) Sunt 499 de fracţii subunitare: $\frac{1}{999}, \frac{2}{998}, ..., \frac{499}{501}$.

c) Da, $\frac{500}{500}$.

d) 499 = 999 – (499 + 1) fracţii supraunitare.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră fracţiile $\frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{6}{14}, \frac{12}{8}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{14}{14}, \frac{11}{15}$.

a) Scrieţi fracţiile cu numitorul 8.

b) Scrieţi fracţiile care au numărătorul un multiplu al lui 3.

c) Scrieţi fracţiile care au numărătorul şi numitorul prime între ele.

2. Considerăm fracţiile $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{6}{6}$.

a) Precizaţi numărătorul şi numitorul fiecărei fracţii.

b) Reprezentaţi fracţiile, considerând întregul un segment cu lungimea de 6 cm.

3. Considerăm un pătrat cu latura de 4 cm. Coloraţi cu albastru $\frac{5}{16}$ din el şi cu gri $\frac{4}{16}$ din el. Ce fracţie reprezintă suprafaţa necolorată?

4. a) Scrieţi trei fracţii care au numărătorul egal cu 5.

b) Scrieţi trei fracţii care au numitorul egal cu 8.

c) Scrieţi trei fracţii care au numărătorul un divizor al lui 18, iar numitorul un multiplu de 5.

5. Câte doimi au:

a) un întreg; b) doi întregi; c) o sută de întregi?

6. a) Câte optimi au 8 întregi?

b) Câte treimi au 5 întregi?

c) Câte cincimi au 3 întregi?

7. Câţi întregi sunt în:

a) 50 doimi; b) 35 şeptimi; c) 40 cincimi;

d) 100 zecimi; e) 12 treimi; f) 1000 sferturi?

8. Scrieţi ca procente următoarele fracţii:

a) $\frac{8}{100}$; b) $\frac{23}{100}$; c) $\frac{11}{100}$; d) $\frac{143}{100}$; e) $\frac{180}{100}$; f) $\frac{200}{100}$.

9. Scrieţi ca fracţii următoarele procente:

a) 2%; b) 50%; c) 10%; d) 20%; e) 100%; f) 150%.

10. Se consideră fracţiile: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{7}$.

a) Scrieţi fracţiile subunitare din şir. b) Scrieţi fracţiile echiunitare din şir.

c) Câte fracţii supraunitare sunt?

11. Se consideră şirul de fracţii: $\frac{11}{72}, \frac{12}{3}, \frac{15}{18}, \frac{8}{6}, \frac{9}{12}, \frac{10}{25}, \frac{15}{15}, \frac{18}{7}$. La întrebarea: „Câte fracţii subunitare sunt?”, patru elevi au dat răspunsurile:

Ana	5
Bianca	7
Cosmin	8
Dana	4

Răspunsul corect este dat de:

a) Ana; b) Bianca; c) Cosmin; d) Dana.

12. a) Scrieţi fracţiile subunitare care au numărătorul cifră pară nenulă şi numitorul cifră impară.

b) Scrieţi fracţiile echiunitare care au numărătorul şi numitorul cifre impare.

c) Scrieţi fracţiile supraunitare care au numărătorul şi numitorul cifre pare nenule.

13. Determinaţi numărul natural n, astfel încât următoarele fracţii sunt echiunitare:

a) $\frac{8}{n+3}$; b) $\frac{12}{n-5}$; c) $\frac{4}{3n+1}$; d) $\frac{7n+2}{16}$; e) $\frac{5n-1}{24}$; f) $\frac{19n+5}{100}$.

14. Determinaţi numărul natural n pentru care următoarele fracţii sunt subunitare:

a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n+1}{5}$; c) $\frac{3n+2}{10}$; d) $\frac{5n-1}{18}$; e) $\frac{7}{n+3}$; f) $\frac{11}{2n+1}$.

15. Determinaţi valorile numărului natural nenul n, astfel încât următoarele fracţii să fie supraunitare:

a) $\frac{8}{3n+1}$; b) $\frac{7}{3n-2}$; c) $\frac{11}{5n+3}$; d) $\frac{2n+1}{7}$; e) $\frac{7n-4}{25}$; f) $\frac{4n-2}{1001}$.

16. Scrieţi toate fracţiile supraunitare de forma $\frac{\overline{a6}}{\overline{b3}}$, astfel încât numărătorul este un număr natural pătrat perfect, iar numitorul un număr prim.

17. Determinaţi numărul $\overline{xy}$, astfel încât fracţia $\frac{4}{x+y}$ este supraunitară.

18. Determinaţi fracţiile $\frac{a}{b}$, a, b numerele naturale nenule, dacă:

a) sunt subunitare şi $a + b = 15$; b) sunt supraunitare şi $a \cdot b = 36$.

19. Determinaţi numărul fracţiilor care îndeplinesc următoarele condiţii:

a) sunt supraunitare, au numărătorul un divizor al lui 18, iar numitorul un divizor al lui 35;

b) sunt subunitare, au numărătorul un multiplu nenul al lui 22, iar numitorul un multiplu, de două cifre, al lui 33.

20. Determinaţi numărul fracţiilor care îndeplinesc următoarele condiţii:

a) au numărătorul un număr natural nenul de o cifră, iar numitorul un număr natural de două cifre;

b) au numărătorul o cifră nenulă pară, iar numitorul un număr natural impar de două cifre.

IV.2. FRACŢII ECHIVALENTE. COMPARAREA FRACŢIILOR CU ACELAŞI NUMITOR SAU ACELAŞI NUMĂRĂTOR. REPREZENTAREA PE AXĂ A UNEI FRACŢII ORDINARE. INTRODUCEREA ŞI SCOATEREA ÎNTREGILOR DINTR-O FRACŢIE

• Se numesc **fracţii echivalente** fracţiile care reprezintă aceeaşi parte din întreg.

Notăm: $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$.

Citim: fracţia $\frac{a}{b}$ este echivalentă (egală) cu fracţia $\frac{c}{d}$.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.}$$

Observaţie: Orice număr natural n se poate scrie ca fracţia ordinară $\frac{n}{1}$.

• Pentru **a scoate întregii dintr-o fracţie supraunitară**, împărţim numărătorul la numitor. Numărul întregilor este câtul împărţirii, numărătorul este restul, iar numitorul nu se schimbă.

$$\boxed{a = b \cdot c + r \Rightarrow \frac{a}{b} = c\frac{r}{b}.}$$

Exemplu: $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

• Pentru **a introduce întregii într-o fracţie**, înmulţim numărul întregilor cu numitorul, la care se adaugă numărătorul, pentru a obţine noul numărător, în timp ce numitorul rămâne neschimbat.

$$\boxed{c\frac{r}{b} = \frac{c \cdot b + r}{b}.}$$

Exemplu: $5\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$.

• Dintre două fracţii ordinare cu acelaşi numitor, este mai mare fracţia care are numărătorul mai mare.

Exemple: $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$; $\frac{18}{73} < \frac{23}{73}$.

CAPITOLUL V
FRACŢII ZECIMALE

V.1. Fracţii zecimale finite

I. Pentru fracţiile ordinare de forma $\frac{1}{10^n}$, $n \geq 1$, se foloseşte în mod uzual **scrierea poziţională cu virgulă**. Astfel:

- $\frac{1}{10}$, *o zecime*, se scrie sub forma 0,1;
- $\frac{1}{100}$, *o sutime*, se scrie sub forma 0,01;
- $\frac{1}{1000}$, *o miime*, se scrie sub forma 0,001 etc.

În general, $\frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{000...0}_{n-1 \text{ zerouri}}1$.

II. Orice fracţie ordinară care are drept numitor o putere a lui 10 se poate scrie ca **fracţie zecimală** (**număr zecimal**) folosind scrierea poziţională cu virgulă:

$$\frac{321}{100} = \frac{300}{100} + \frac{20}{100} + \frac{1}{100} = 3 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} = 3,21$$

cifra unităţilor cifra zecimilor cifra sutimilor

$$\frac{101}{1000} = \frac{100}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} = 0,101$$

cifra zecimilor cifra sutimilor cifra miimilor

III. Dacă $\overline{n,abc}$ este o fracţie zecimală, unde n este un număr natural, iar a, b, c sunt cifre, atunci n se numeşte **partea întreagă**, iar $\overline{0,abc}$ se numeşte **partea zecimală.**

Vom lua în considerare, deocamdată, doar **fracţiile zecimale finite**, adică cele care au un număr finit de zecimale nenule. Zecimalele, începând de după virgulă şi până la ultima nenulă, se numesc **zecimale semnificative**. După acestea, fracţiei i se pot adăuga oricâte zerouri nesemnificative.

IV. Orice fracţie ordinară care, în formă ireductibilă, are numitorul divizibil doar cu 2 sau cu 5 (şi nedivizibil cu alt număr prim) se poate scrie sub formă de fracţie zecimală finită:

$$\frac{3}{40} = {}^{5^2)}\frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{1000} = 0,075;$$

$$\frac{7}{175}{}^{(7} = \frac{1}{25} = {}^{2^2)}\frac{1}{5^2} = \frac{2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{4}{100} = 0,04.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Scrieţi următoarele fracţii zecimale sub formă de fracţii ordinare ireductibile:

a) 0,16; b) 1,75; c) 20,002.

Soluţie: a) $0{,}16=\frac{16}{100}^{(4}=\frac{4}{25}$;

b) $1{,}75=1\frac{75}{100}^{(25}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$;

c) $20{,}002=20\frac{2}{1000}^{(2}=20\frac{1}{500}=\frac{10001}{500}$.

2. Determinaţi numărul natural n, ştiind că:

a) $\frac{n}{35}=2{,}8$; b) $\frac{34}{n}=0{,}85$.

Soluţie: a) Cum $2{,}8=2\frac{8}{10}^{(2}=2\frac{4}{5}={}^{7)}\frac{14}{5}=\frac{98}{35}$, rezultă că $n=98$.

b) Deoarece $0{,}85=\frac{85}{100}^{(5}={}^{2)}\frac{17}{20}=\frac{34}{40}$, deducem că $n=40$.

3. Determinaţi ultima zecimală semnificativă a fracţiei zecimale care se obţine din fracţia ordinară $\frac{1}{5^{55}}$.

Soluţie: Avem $\frac{1}{5^{55}}=\frac{2^{55}}{2^{55}\cdot 5^{55}}=\frac{2^{55}}{10^{55}}$. Ultima zecimală semnificativă (ultima zecimală nenulă) din scrierea zecimală a acestei fracţii este ultima cifră a lui 2^{55}. Ne amintim că ultima cifră a puterilor lui 2 se repetă din patru în patru, în succesiunea 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6 etc. Cum 55 dă restul 3 la împărţirea prin 4, rezultă că $u(2^{55})=u(2^3)=8$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieţi ca fracţii zecimale următoarele fracţii ordinare:

a) $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{117}{10}$; $5\frac{3}{10}$;

b) $\frac{7}{100}$; $\frac{17}{100}$; $\frac{117}{100}$; $\frac{2117}{100}$; $5\frac{3}{100}$; $25\frac{29}{100}$;

c) $\frac{3}{1000}$; $\frac{23}{1000}$; $\frac{123}{1000}$; $\frac{3123}{1000}$; $\frac{10023}{1000}$; $3\frac{33}{1000}$.

2. Citiţi următoarele fracţii zecimale:

a) 0,7; 1,3; 21,5; 2,1;
b) 0,13; 0,03; 2,51; 21,02;
c) 0,121; 0,017; 0,007; 2,012;
d) 0,2157; 2,0123; 3,10125.

3. Scrieţi cu cifre următoarele fracţii zecimale:

a) şaptesprezece sutimi; b) o sută douăsprezece miimi;

c) două sute treizeci şi cinci de sutimi; d) paisprezece întregi şi paisprezece miimi;

e) cinci virgulă cinci mii cinci.

4. Identificaţi partea întreagă şi partea zecimală pentru fiecare dintre următoarele fracţii zecimale:

a) 0,123; b) 2,7; c) 31,02; d) 1001,3003.

5. Rescrieţi următoarele numere, astfel încât partea lor zecimală să conţină trei cifre:

a) 2,17; b) 3,01; c) 2,7; d) 27.

6. Completaţi tabelul de mai jos, având ca model prima coloană:

	A	B	C	D
Fracţia zecimală	20,17	0,203	2,1	100,01
Cifra unităţilor	0			
Numărul unităţilor	20			
Cifra zecimilor	1			
Numărul zecimilor	201			
Cifra sutimilor	7			
Numărul sutimilor	2017			
Cifra miimilor	0			
Numărul miimilor	20170			

7. După modelul: $3+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}=3,257$, scrieţi următoarele sume sub formă de fracţii zecimale:

a) $\frac{2}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$; b) $3\cdot 100+2\cdot 10+5+\frac{2}{10}+\frac{7}{100}$;

c) $2\cdot 10+\frac{2}{10}+\frac{2}{1000}$; d) $a\cdot 10+b+\frac{c}{10}+\frac{d}{100}$.

8. După modelul: $112,103 = 1\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + 2 + \frac{1}{10}+\frac{3}{10^3}$, scrieţi următoarele fracţii zecimale ca sume de puteri ale lui 10 şi fracţii ordinare având ca numitori puteri ale lui 10:

a) 2,45; b) 22,202; c) 4,004; d) $\overline{abc,def}$.

9. Determinaţi cifrele a, b, c şi d în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $\overline{2a,3bc}=\overline{27,d09}$;

b) $\overline{2ab,c3}=d\cdot 10^2+4\cdot 10+5+\frac{7}{10}+\frac{3}{10^2}$;

c) $\frac{\overline{3abc}}{1000}=\overline{d,103}$.

10. Determinaţi numărul natural x, ştiind că:

a) $2,24=\dfrac{x}{10^2}$;   b) $2,7=\dfrac{2700}{x}$;   c) $x=\dfrac{14000}{10^4}$.

11. Scrieţi următoarele fracţii zecimale sub formă de fracţii ordinare ireductibile:

a) 0,5; 2,5; 0,2; 3,6; 10,8; 1,7;   b) 0,25; 1,75; 0,12; 3,48; 5,55; 1,14;

c) 0,125; 1,825; 2,375; 1,104; 2,328; 0,756.

12. Scrieţi următoarele fracţii ordinare sub formă de fracţii zecimale finite:

a) $\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2};\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5};7\dfrac{4}{5}$;   b) $\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4};3\dfrac{3}{4};\dfrac{18}{25};5\dfrac{4}{25}$;

c) $\dfrac{1}{8};\dfrac{3}{8};2\dfrac{7}{8};\dfrac{3}{125};\dfrac{137}{125}$;   d) $\dfrac{1}{20};\dfrac{13}{40};2\dfrac{17}{50};\dfrac{1001}{250};\dfrac{7}{80}$.

13. Scrieţi următoarele fracţii ordinare sub formă de fracţii zecimale finite:

a) $\dfrac{21}{140};\dfrac{27}{75};\dfrac{33}{176};\dfrac{51}{120};\dfrac{49}{875}$;   b) $\dfrac{36}{15^2};\dfrac{2\cdot3^3\cdot7^5}{5\cdot21^3};\dfrac{11\cdot4^5\cdot25^4}{10^{10}}$.

14. Determinaţi ultimele două zecimale semnificative ale fracţiei zecimale care se obţine din:

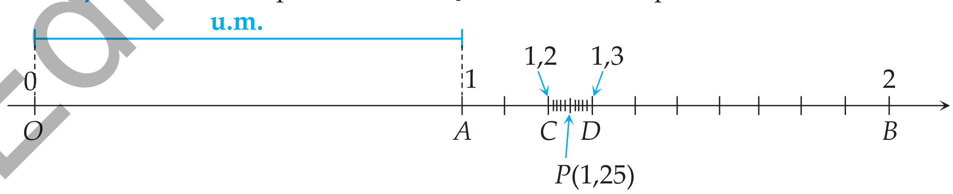
a) $\dfrac{1}{5^8}$;   b) $\dfrac{3}{2^4}$;   c) $\dfrac{130}{2^{100}}$.

15*. Fie $N=\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4}_{4\text{ factori}}+\underbrace{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}_{5\text{ factori}}+\underbrace{10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}_{6\text{ factori}}+\ldots+\underbrace{73\cdot74\cdot\ldots\cdot85}_{13\text{ factori}}$. Determinaţi partea zecimală a numărului $\dfrac{N}{100}$.

V.2. Reprezentarea pe axă, compararea şi ordonarea fracţiilor zecimale finite. Aproximări

I. Reprezentarea fracţiilor zecimale finite pe axa numerelor se realizează la fel ca reprezentarea fracţiilor ordinare: pentru a reprezenta zecimile, împărţim întregul în 10 părţi egale, pentru a reprezenta sutimile, împărţim întregul în 100 de părţi egale (sau împărţim doar zecimea de care avem nevoie în 10 părţi egale) etc.

Exemplu. Dorim să reprezentăm fracţia zecimală 1,25 pe axa numerelor.



Alegem o unitate de măsură mai mare, fixăm originea O şi identificăm punctele A, B ce corespund numerelor 1, respectiv 2. Împărţim segmentul AB în zece părţi egale şi găsim punctele C, D, care corespund numerelor 1,2 respectiv 1,3. Apoi

ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI
PUNCTE. DREPTE. PLANE

VI.1. Punct. Dreaptă. Plan

I. Punctul ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe o foaie de hârtie de un creion bine ascuţit. Punctul nu are dimensiuni.

Fig. 1

În figura 1 sunt reprezentate punctele *A* şi *B*; nu vom confunda punctul *B* cu bulina prin care este reprezentat. De obicei, notăm punctele folosind litere mari.

Fig. 2

În figura 2, punctele *M* şi *N* sunt situate în acelaşi loc; scriem $M = N$ şi spunem că cele două puncte sunt **identice/confundate/coincid**. Punctele *M* şi *P* nu sunt în acelaşi loc; scriem $M \neq P$ şi spunem că cele două puncte sunt **distincte/diferite**. De cele mai multe ori, când spunem „punctele *M* şi *P*", subînţelegem că ele sunt distincte.

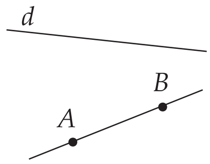


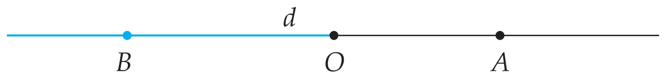
Fig. 3

II. Dreapta este comparabilă cu un fir de aţă bine întins, nesfârşit de lung şi fără grosime. Dreapta este formată din puncte.

În figura 3 sunt reprezentate două drepte: dreapta *d* (notată folosind o literă mică) şi dreapta *AB* (notată folosind două litere mari care desemnează două puncte distincte ale sale).

Instrumentul geometric care ajută la trasarea dreptelor este rigla. Date fiind două puncte distincte *A* şi *B*, constatăm că există o dreaptă şi numai una care să treacă prin aceste două puncte; spunem că o dreaptă este determinată de (oricare) două puncte distincte ale sale.

Semidreapta este o parte a unei drepte formată din toate punctele acesteia aflate de aceeaşi parte faţă de un punct fixat de pe dreaptă. Punctul „de start" al unei semidrepte este numit **originea semidreptei**.

Fig. 4


În figura 4 este desenată o dreaptă *d*, pe care s-a fixat un punct *O*. Am reprezentat cu negru punctele dreptei care se află de aceeaşi parte a lui *O* ca punctul *A* şi cu albastru punctele dreptei care se află de aceeaşi parte a lui *O* ca punctul *B*. Partea cu negru este semidreapta *OA*, iar cea cu albastru semidreapta *OB*.

Când vorbim despre „semidreapta *MN*", înţelegem că originea sa este în primul punct numit, adică în *M*. Semidreptele *MN* şi *NM* sunt distincte (în timp ce dreptele *MN* şi *NM* sunt una şi aceeaşi).

Segmentul este acea parte a unei drepte formată din toate punctele sale situate între două puncte fixate de pe dreaptă. Punctele „frontieră” ale unui segment se numesc **capetele** (**extremitățile**) **segmentului**.

În figura 5, partea dreptei d colorată cu albastru reprezintă segmentul AB.

Fig. 5

III. Planul este comparabil cu suprafața unei mese nemărginită în toate direcțiile. Planul nu are grosime, conține drepte și este format din puncte.

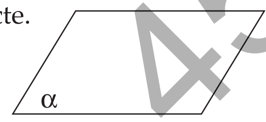


Fig. 6

Deşi este nemărginit, vom reprezenta planul printr-o porțiune dreptunghiulară a sa, care, în perspectivă, va apărea ca un paralelogram (figura 6). Pentru a nota planele, folosim litere mici din alfabetul grec sau trei litere mari care desemnează trei puncte ale sale.

Semiplanul este o parte a unui plan formată din toate punctele acestuia aflate de aceeași parte față de o dreaptă fixată.

În figura 7, dreapta d separă planul α în două semiplane, unul colorat cu albastru, al doilea cu gri. Dreapta d se numește **frontieră** a celor două semiplane.

Fig. 7

PROBLEME REZOLVATE

1. În figura 8 este reprezentată piramida $ABCD$. Identificați în figură cât mai multe:

a) puncte; b) drepte; c) plane.

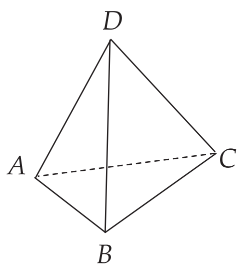


Fig. 8

Soluție: a) În figură sunt reprezentate și numite 4 puncte: A, B, C și D. (Putem, însă, identifica în figură multe alte puncte (o infinitate): de exemplu, oricare dintre segmentele AB sau CD conține oricât de multe puncte.)

b) În figură sunt reprezentate 6 segmente: AB, BC, AC, AD, BD și CD. (Unind, însă, un punct oarecare al lui AB cu un punct oarecare al lui CD (de exemplu), putem obține noi segmente.)

c) În figură sunt reprezentate 4 plane: (ABC), (ABD), (ACD) și (BCD).

2. Pe dreapta d_1 considerăm punctele A, B și C, iar pe dreapta d_2 considerăm punctele M și N (figura 9).

a) Câte segmente au drept capete două dintre cele cinci puncte?

b) Câte drepte determină aceste puncte, luate două câte două?

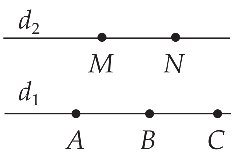


Fig. 9

Soluție: a) 10 segmente: AB, AC, BC, MN, AM, AN, BM, BN, CM și CN.

b) 8 drepte: d_1, d_2, AM, AN, BM, BN, CM și CN.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A, B şi C. Stabiliţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

a) Dacă $A = B$ şi $B = C$, atunci $A = C$.
b) Dacă $A = B$ şi $B \neq C$, atunci $A \neq C$.
c) Dacă $A \neq B$ şi $B \neq C$, atunci $A \neq C$.

2. Desenaţi un punct A şi patru drepte d_1, d_2, d_3 şi d_4 care trec prin punctul A. Câte drepte care trec prin A se pot desena?

3. a) Desenaţi două puncte distincte A şi B, apoi trasaţi dreapta care trece prin aceste două puncte. Denumiţi şi notaţi această dreaptă.

b) Câte puncte conţine această dreaptă? Marcaţi şi notaţi cinci dintre aceste puncte.

4. Denumiţi şi notaţi în cel puţin cinci moduri dreapta d din figura 10.

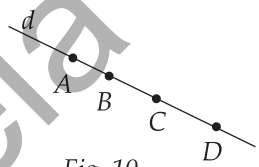


Fig. 10

5. Stabiliţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false (figura 11):

a) Dreapta d este formată din punctele A şi B.
b) Dreapta d este determinată de punctele A şi B.
c) Dreptele AB şi d coincid.

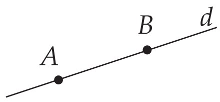


Fig. 11

6. Stabiliţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false (figura 11):

a) Dreapta AB coincide cu dreapta BA.
b) Semidreapta AB coincide cu semidreapta BA.

7. În figura 12 sunt reprezentate cinci puncte A, B, C, D, E şi trei dintre dreptele pe care aceste puncte le determină, luate două câte două (anume dreptele AB, BD şi CE). Desenaţi şi notaţi celelalte drepte pe care le determină punctele A, B, C, D şi E, luate două câte două. Câte drepte determină, în total, aceste puncte?

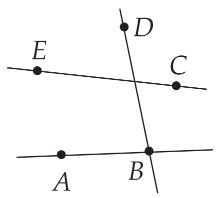


Fig. 12

8. Câte semidrepte au originea în unul dintre punctele A, B, C sau D din figura 13 şi trec printr-unul dintre punctele rămase? Denumiţi şi notaţi aceste semidrepte.

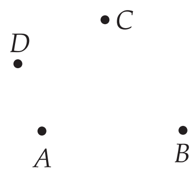


Fig. 13

9. Câte semidrepte au originea în unul dintre punctele A, B, C sau D din figura 14 şi trec printr-unul dintre punctele rămase? Denumiţi şi notaţi aceste semidrepte.

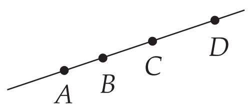


Fig. 14

10. Considerăm un punct O în planul caietului.

a) Câte semidrepte cu originea în O există? Desenaţi şi notaţi trei astfel de semidrepte.

b) Câte semidrepte trec prin punctul O şi au originea într-un alt punct al planului caietului? Desenaţi şi notaţi trei astfel de semidrepte.

11. În figura 15 este reprezentat pătratul $ABCD$. Identificaţi segmentele AB, BC, CD, DA, AC şi BD. Care dintre aceste segmente sunt laturi ale pătratului şi care sunt diagonale?

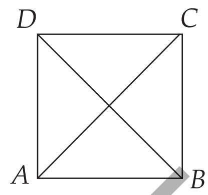


Fig. 15

12. Denumiţi şi notaţi segmentele care formează liniile frânte din figura 16. Care dintre acestea sunt linii frânte închise / linii frânte deschise?

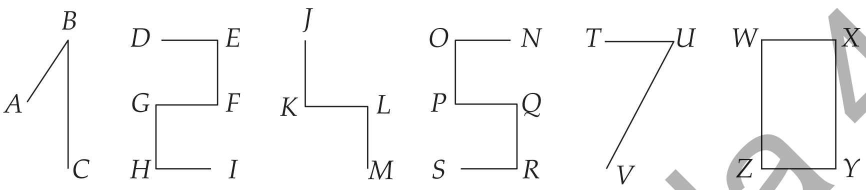


Fig. 16

13. În figura 17, identificaţi şi numiţi:

a) trei drepte;

b) şase semidrepte;

c) trei segmente.

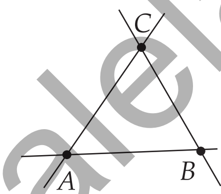


Fig. 17

14. În figura 18, identificaţi şi numiţi:

a) segmentele care conţin toate punctele situate între B şi C;

b) semidreptele care conţin toate punctele segmentului BC.

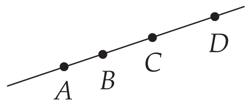


Fig. 18

15. Se consideră punctele A, B, C şi D din figura 19.

a) Câte drepte determină cele patru puncte, luate două câte două?

b) Câte segmente au drept capete două dintre cele patru puncte?

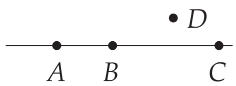


Fig. 19

16*. Se consideră o sută de puncte (distincte) A_1, A_2, …, A_{100}.

a) Câte segmente au drept capete două dintre aceste puncte?

b) Ce puteţi afirma despre numărul dreptelor pe care le determină aceste puncte, luate două câte două?

17. În figura 20, identificaţi:

a) perechi de puncte aflate de aceeaşi parte a dreptei d;

b) perechi de puncte situate de o parte şi de alta a dreptei d.

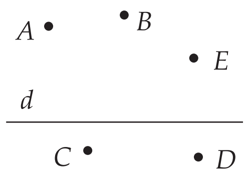


Fig. 20

18. În figura 21, identificaţi:

a) semidreptele situate în semiplanul delimitat de dreapta AB care conţine punctul P;

b) semidreptele situate în semiplanul delimitat de dreapta CD care nu conţine punctul P.

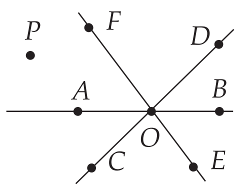


Fig. 21

CAPITOLUL VII
UNGHIURI

VII.1. UNGHI: DEFINIŢIE, NOTAŢII, ELEMENTE

• Se numeşte **unghi** figura geometrică formată din două semidrepte cu aceeaşi origine (figura 1).

• Elementele unghiului sunt:

– laturile unghiului (cele două semidrepte cu aceeaşi origine);

– vârful unghiului (originea semidreptelor).

Notaţie: $\widehat{AOB}$ sau $\sphericalangle AOB$ sau $\hat{O}$ sau $\sphericalangle O$ (figura 2).

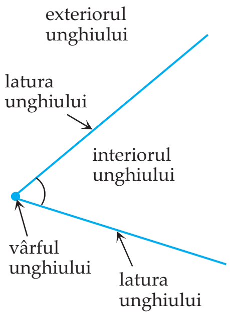


Fig. 1

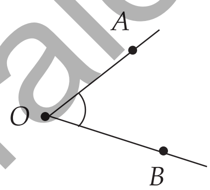


Fig. 2

PROBLEME REZOLVATE

1. În figura 3 este desenat un unghi $\sphericalangle XOY$ şi punctele A, B, C, D, E, F.

a) Cum mai poate fi denumit unghiul XOY?

b) Care sunt laturile unghiului?

c) Care este vârful unghiului?

d) Care puncte sunt în interiorul unghiului?

e) Care puncte sunt în exteriorul unghiului?

f) Care puncte sunt pe laturile unghiului?

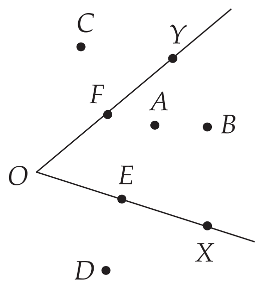


Fig. 3

Soluţie: a) $\sphericalangle XOF$ sau $\sphericalangle EOY$ sau $\sphericalangle EOF$.

b) Laturile unghiului sunt semidreptele $[OX$ şi $[OY$.

c) Vârful unghiului este O.

d) A, B sunt în Int($\sphericalangle XOY$).

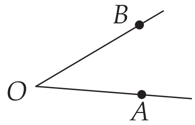
e) C, D sunt în Ext($\sphericalangle XOY$).

f) Punctele E şi F se află pe laturile OX, respectiv OY.

2. a) Desenați o pereche de semidrepte care să formeze un unghi. Notați-l.

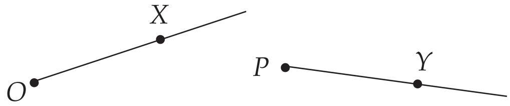
b) Desenați o pereche de semidrepte care să nu determine un unghi. Observați diferențele dintre cele două figuri.

Soluție: a)

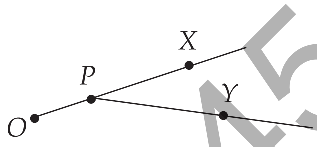


$\sphericalangle AOB$ este format din semidreptele OA și OB.

b1)



b2)



PROBLEME PROPUSE

1. Observați figura 4 și precizați vârful și laturile unghiurilor ABC, BAC și CAB.

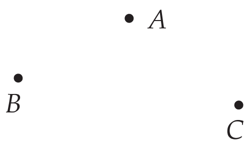


Fig. 4

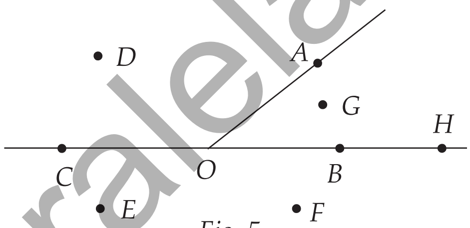


Fig. 5

2. Studiați figura 5 și stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții.

a) G este interior unghiului AOB.

b) Punctele D, E, F sunt exterioare unghiului AOB.

c) Punctul H este pe latura OB a unghiului AOB.

d) Punctul C este pe latura OB a unghiului AOB.

3. Observați figura 6. Precizați care dintre punctele A, B, C, D, E, F, G, H, I sunt:

a) interioare unghiului AOB;

b) interioare unghiului AOC;

c) exterioare unghiului BOC.

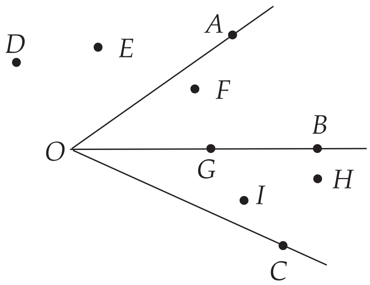


Fig. 6

4. În figura 7 sunt desenate mai multe unghiuri.

a) Numiți patru dintre unghiurile din figură.

b) Desenați punctele M și N care să fie în interiorul unghiului AOD, dar în exteriorul unghiului BOC.

c) Desenați punctul P care să fie în exteriorul unghiului AOD.

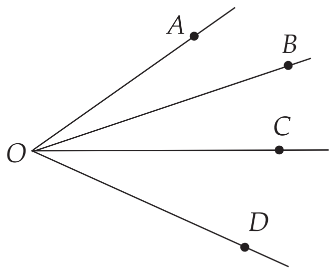


Fig. 7

5. Stabiliţi valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziţii referitoare la figura 8:

a) Punctul *D* este interior unghiului *AOB*.

b) Semidreapta deschisă *OF* este exterioară unghiului *AOB*.

c) Punctul *F* nu se află în interiorul unghiului *AOB*.

d) Segmentul *DF* este interior unghiului *AOB*.

e) Dreapta *DE* este interioară unghiului *AOB*.

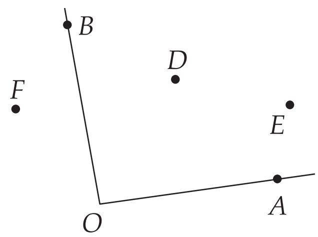


Fig. 8

6. În figura 9 sunt reprezentate dreptele *AB*, *AC*, *AD*, astfel încât punctele *B*, *C*, *D* să fie coliniare.

a) Scrieţi unghiurile care au o latură semidreapta *AB*, de origine *A*.

b) Scrieţi unghiurile care au o latură semidreapta *BA*, de origine *B*.

c) Scrieţi unghiurile cu vârful în punctul *D*.

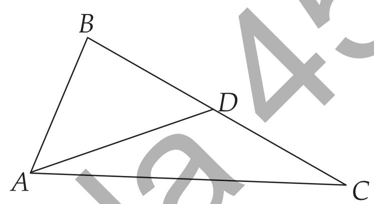


Fig. 9

7. Fie unghiul *XOY* din figura 10. Desenaţi trei puncte *A*, *B*, *C*, astfel încât segmentul *AB* nu intersectează laturile unghiului, iar segmentul *AC* intersectează latura *OY* a unghiului dat.

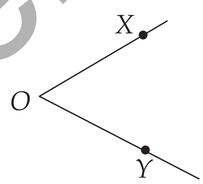


Fig. 10

8. În figura 11, *A*, *E*, *C* şi *B*, *D*, *C* sunt puncte coliniare.

a) Scrieţi un unghi cu vârful în *D*.

b) Scrieţi un unghi care are o latură semidreapta *EC*, de origine *E*.

c) Câte unghiuri din figură au vârful *B*?

d) Scrieţi un unghi care conţine punctul *D* în interior.

e) Scrieţi un unghi care are semidreapta deschisă *EB*, de origine *E*, în interior.

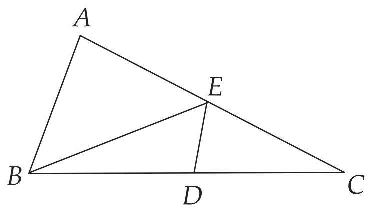


Fig. 11

CAPITOLUL VIII
UNITĂŢI DE MĂSURĂ

VIII.1. Unităţi de măsură pentru lungime. Perimetre

1. Metrul este o unitate de măsură pentru lungime, una dintre cele şapte unităţi fundamentale ale Sistemului Internaţional.

Prin adăugarea de prefixe, se obţin alte unităţi de măsură, multiplii şi submultiplii metrului, necesare în diferite domenii de activitate.

2. Kilometrul (km), hectometrul (hm), decametrul (dam) sunt multipli ai metrului, iar decimetrul (dm), centimetrul (cm), milimetrul (mm) sunt submultipli ai metrului.

1 km = 1000 m	1 dm = 0,1 m
1 hm = 100 m	1 cm = 0,01 m
1 dam = 10 m	1 mm = 0,001 m

3. Perimetrul unui triunghi având lungimile laturilor a, b, c este egal cu $a + b + c$.

Perimetrul unui pătrat cu lungimea laturii l este egal cu $4l$.

Perimetrul unui dreptunghi cu lăţimea l şi lungimea L este egal cu $2(l + L)$. (Presupunem toate laturile şi perimetrul măsurate cu aceeaşi unitate de lungime.)

Probleme rezolvate

1. Un teren are forma unui dreptunghi cu lăţimea de 0,1 km şi lungimea de 2,3 hm. Calculaţi câţi metri de sârmă sunt necesari pentru a construi un gard în jurul terenului, ştiind că lungimea totală a sârmei folosite trebuie să fie de cinci ori mai mare decât perimetrul dreptunghiului.

Soluţie: Deoarece 0,1 km = 100 m şi 2,3 hm = 230 m, perimetrul terenului este egal cu 2(100 m + 230 m) = 660 m. Prin urmare, pentru construirea gardului sunt necesari $5 \cdot 660$ m = 3300 m de sârmă.

2. Pe fiecare dintre laturile unui triunghi ABC cu $AB = BC = CA = 9$ cm se construieşte câte un triunghi echilateral (toate laturile egale) cu latura de 3 cm. Apoi, pe fiecare dintre cele douăsprezece laturi ale figurii obţinute se construieşte din nou câte un triunghi echilateral, dar, de data aceasta, cu latură de 1 cm (figura 1). Calculaţi perimetrul figurii finale.

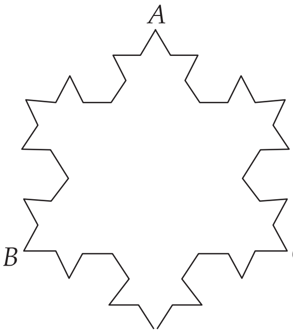


Fig. 1

Soluţie: Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 27 cm. După construirea celor trei triunghiuri echilaterale cu latura de 3 cm, perimetrul creşte cu $3 \cdot 3$ cm = 9 cm, devenind astfel egal cu 27 cm + 9 cm = 36 cm. Perimetrul figurii finalei este cu $12 \cdot 1$ cm = 12 cm mai mare decât perimetrul figurii anterioare, adică este egal cu 48 cm.

PROBLEME PROPUSE

1. Transformați în metri:

a) 3 dam; b) 0,4 hm; c) 0,1 km;
d) 25 dm; e) 300 cm; f) $1{,}2 \cdot 10^3$ mm.

2. Transformați în centimetri:

a) 250 mm; b) 7 dm; c) 0,02 m;
d) 10^3 mm; e) 5 dam; f) 0,0003 hm.

3. Comparați lungimile următoarelor segmente:

a) AB = 32 dam, CD = 3,2 hm; b) AB = 7,3 km, CD = 690 dam;
c) AB = 14990 m, CD = 15 km; d) $AB = 10^3$ cm, CD = 10 m;
e) AB = 0,1 m, CD = 200 mm; f) AB = 131 dm, CD = 1,28 dam.

4. Determinați numărul x în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) 0,1 dam + 2 m = x m; b) 2 hm + 3 dam = x m;
c) $2 \cdot 10^3$ mm + $5 \cdot 10^2$ cm = x m; d) 0,4 dam + 30 dm = x m;
e) 0,12 hm + 5600 cm = x m; f) 0,25 dam + 1500 mm = x m.

5. Determinați numărul x în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) 0,2 km + 340 dam = x hm; b) 0,08 km + 240 dm = x m;
c) 6,25 hm – 0,2 km + 45 m = x dam; d) 400 mm + 0,1 m – 20 cm = x dm;
e) $2 \cdot 10^5$ mm + $0{,}3 \cdot 10^5$ cm + $4 \cdot 10^2$ dm = x dam;
f) 0,005 km + 0,7 hm – 120 dm = x m.

6. Calculați diferența dintre perimetrele a două pătrate, știind că latura primului pătrat este cu 4 cm mai mare decât latura celui de-al doilea pătrat.

7. Un dreptunghi, cu perimetrul de 120 m, are lățimea egală cu un sfert din lungime. Determinați lățimea și lungimea dreptunghiului.

8. Perimetrul unui triunghi este egal cu 42 cm, iar lungimile laturilor sale, măsurate tot în centimetri, sunt trei numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor triunghiului considerat.

9. O curte în formă de dreptunghi, cu lungimea de 80 m și lățimea de 30 m, este împrejmuită cu un gard format din patru rânduri de sârmă (figura 2). Calculați câți metri de sârmă sunt necesari pentru construirea gardului.

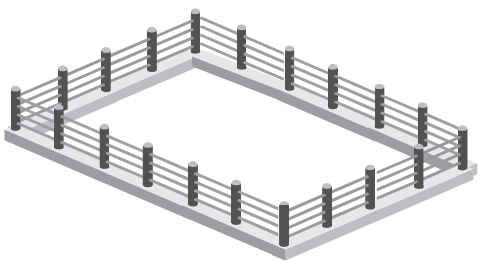


Fig. 2

10. Din cele patru colţuri ale unui pătrat cu latura de 18 cm se decupează câte un pătrat cu latura de 3 cm (figura 3). Determinaţi perimetrul figurii astfel obţinute.

11. În figura 4 sunt desenate trei triunghiuri echilaterale: *ABC*, *CDE* şi *EFG*. Punctele *D* şi *F* sunt mijloacele laturilor *AC*, respectiv *CE*, iar *AB* = 16 cm. Calculaţi perimetrul figurii *ABCFGED*.

12. În figura 5 este desenat un teren format din două dreptunghiuri *ABCD* şi *BEFG*, cu *DC* = 80 m, *CG* = 30 m, *GF* = 50 m şi *FE* = 70 m. Calculaţi perimetrul terenului.

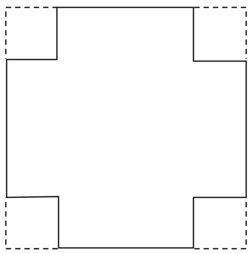


Fig. 3

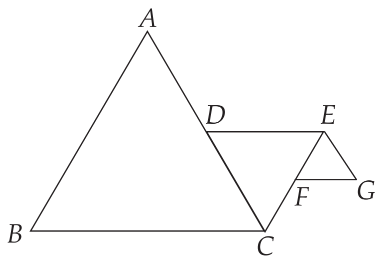


Fig. 4

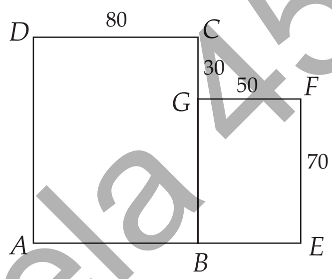


Fig. 5

13. Toate unghiurile din figura 6 au măsura de 90° (sunt unghiuri drepte), iar lungimile segmentelor indicate în figură sunt exprimate în metri. Aflaţi câţi metri are segmentul marcat cu *x* şi apoi calculaţi perimetrul figurii.

14. Litera T din figura 7 este formată din două dreptunghiuri având fiecare lungimea de 9 cm şi lăţimea de 3 cm. Aflaţi perimetrul figurii *ABCDEFGH*.

15. Pe fiecare latură a unui pătrat cu latura de 27 cm se construieşte câte un pătrat cu latura de 9 cm.

a) Calculaţi perimetrul figurii rezultate (figura 8).

b) Dacă pe fiecare dintre cele 20 de laturi ale ultimei figuri se construieşte câte un pătrat cu latura de 1 cm, care va fi perimetrul figurii astfel obţinute?

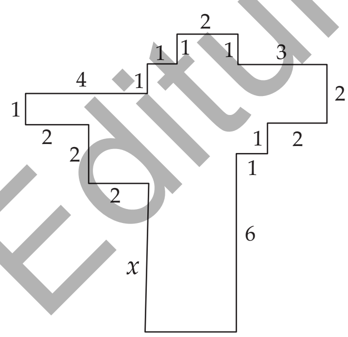


Fig. 6

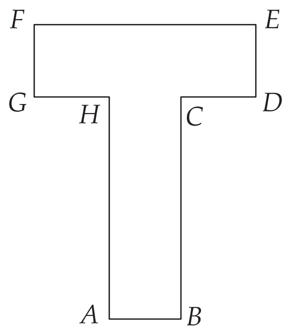


Fig. 7

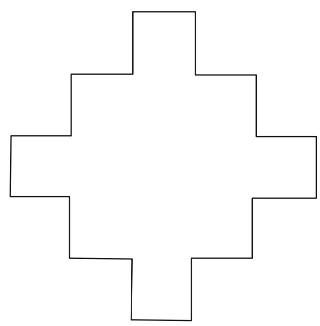


Fig. 8

RECAPITULARE FINALĂ

TESTE DE EVALUARE

TESTUL 1

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. *Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.*

(1p) **1.** Dintre numerele 1, 2, 4 şi 15, numărul prim este:
a) 1; b) 2; c) 4; d) 15.

(1p) **2.** Câtul împărţirii numărului 62 la 12 este egal cu:
a) 4; b) 6; c) 2; d) 5.

(1p) **3.** Rezultatul calculului 44 – 4 · 4 este egal cu:
a) 28; b) 38; c) 40; d) 160.

(1p) **4.** Patru elevi au efectuat calculul $(2^{10} + 2^{10} + 2^{11})^2 : 2^{24}$ şi au obţinut rezultatele din tabelul de mai jos:

Irina	Florian	Emilia	Ecaterina
2	4	8	1

Răspunsul corect este dat de:
a) Irina; b) Florian; c) Emilia; d) Ecaterina.

(1p) **5.** Media aritmetică a două numere este 64. Dacă unul dintre numere este de 3 ori mai mare decât celălalt, produsul numerelor este:
a) 3072; b) 512; c) 128; d) 486.

Subiectul al II-lea. *Scrieţi rezolvările complete.*

1. Se consideră numărul natural $A = \overline{ab} + \overline{ba}$, unde a şi b sunt cifre diferite.
(1p) **a)** Este posibil ca numărul A să fie egal cu 198? Justificaţi răspunsul.
(1p) **b)** Determinaţi $\overline{ab}$, ştiind că A este pătrat perfect, iar $\overline{ab}$ este divizibil cu 8.

2. Un test are 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 4 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scade câte 1 punct.
(1p) **a)** Este posibil ca Dana, care a răspuns la toate întrebările, să aibă 76 de puncte? Justificaţi răspunsul.
(1p) **b)** Darius a răspuns la toate întrebările şi are punctajul final 50. La câte întrebări a răspuns corect Darius?

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Calculați:

a) $120 - 40 : 8$;

b) $7 \cdot 11 \cdot 13 - 1$;

c) $28 \cdot 73 + 27 \cdot 28$;

d) $31 + 144 : (39 - 9 : 3)$.

2. a) Scrieți patru numere naturale pare cu suma cifrelor 3.

b) Scrieți toate numerele naturale de trei cifre cu produsul cifrelor 8.

3. Care este cel mai mic număr natural par format din patru cifre distincte? Dar cel mai mare?

4. Câte numere de două cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4? Câte dintre aceste numere sunt impare?

5. Care este al treisprezecelea termen al șirului 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...?

6. Calculați $A = (2 + 4 + 6 + \ldots + 20) - (1 + 3 + 5 + \ldots + 19)$.

7. Produsul a două numere naturale este 420. Dacă un factor se mărește cu 5, produsul devine 480. Aflați cele două numere.

8. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea că $a + \overline{ab} = b + \overline{ba} + 20$.

9. Determinați numerele naturale care, împărțite la un număr de forma $\overline{abc}$, dau câtul 10 și restul 997.

10. Câte numere naturale de trei cifre, împărțite la 17, dau câtul egal cu restul?

11. Calculați suma numerelor naturale de două cifre care, prin împărțire la 5, dau restul 3.

12. a) Împărțind numărul natural n la 10, obținem restul 1. Ce rest se obține când împărțim numărul n la 5?

b) Împărțind numărul natural n la 5, obținem restul 1. Ce rest se obține când împărțim numărul n la 10?

13. Fie a, b și c trei numere naturale, astfel încât $ab - ac + 7a = 80$ și $b - c = 3$. Calculați $a - b + c$.

14. Fie a, b și c trei numere naturale, astfel încât $a + b + c = 31$ și $2a + 3b + 4c = 105$. Calculați $(2a + b)(b + 2c)(c - a)$.

15*. Notăm cu S suma primilor 100 de termeni ai șirului $1, 2 \cdot 3, 4 \cdot 5 \cdot 6, 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10, \ldots$.

a) Care este ultima cifră a numărului S?

b) Determinați restul împărțirii lui S la 8.

16. Calculați:

a) $3^0 + 0^3 + 2^3$;

b) $3^5 \cdot 3^8 : 3^{11}$;

c) $36 : (2^2 \cdot 3) + 72 : (2 \cdot 3^2)$;

d) $(2^{18} + 4^8) : 8^5$.

73. Se consideră numerele $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{9}{10}$ şi $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{10}{11}$.

a) Comparaţi numerele A şi B.

b) Calculaţi produsul $A \cdot B$.

74. Fie $S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + ... + \frac{1}{97 \cdot 100}$. Demonstraţi că $3S < 1$.

75. Determinaţi numărul raţional x din egalitatea:

a) $6x - 3{,}56 = 7{,}44$;

b) $3 : x + 2{,}43 = 5{,}73$;

c) $\frac{3x+1}{2} + \frac{2x-1}{3} = \frac{5}{6}$;

d) $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{3} : \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{5} - 1 \right) \right] \right\} = 6$.

76. Determinaţi cifra x din egalitatea:

a) $\overline{0,(x)} + \overline{1,(x)} + \overline{2,(x)} = 3,(6)$;

b) $\overline{0,(x)} + \overline{0,0(x)} = \frac{11}{30}$.

77. La dublul unui număr raţional se adaugă $2\frac{2}{5}$. Suma obţinută se împarte la $\frac{43}{15}$, obţinând rezultatul 2. Aflaţi numărul iniţial.

78. Se dau patru numere naturale. Primul reprezintă 66,(6)% din al doilea, al doilea reprezintă 75% din al treilea, iar al treilea reprezintă 80% din al patrulea.

a) Ce procent din al patrulea număr reprezintă primul număr?

b) Aflaţi cele patru numere, ştiind că suma lor este 140.

79. Determinaţi patru numere raţionale, ştiind că media lor aritmetică este 9,075, al treilea este media aritmetică a primelor două, iar ultimul este egal cu 150% din primul.

80*. Determinaţi patru numere raţionale, ştiind că media lor aritmetică este 1,23 şi fiecare dintre ele este media aritmetică a celorlalte trei.

81. Desenaţi patru puncte A, B, C şi D, astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele, iar punctele B şi C să se afle într-unul dintre semiplanele delimitate de dreapta AD.

82. Desenaţi trei puncte A, B şi C, astfel încât AB = 5 cm, BC = 11 cm şi AC = 6 cm. Demonstraţi că cele trei puncte sunt coliniare.

83. Pe axa numerelor se consideră punctele A, B, C, D şi E care corespund numerelor 2, 4, 6, 9, respectiv 12.

a) Realizaţi o figură, alegând unitatea de măsură de 1 cm.

b) Calculaţi $AD + BC - 2AB$ şi $2BC + 3AE - AD$.

84. Pe dreapta d se consideră punctele A, B şi C, în această ordine, astfel încât $AB = 2BC$ şi AC = 12 cm. Calculaţi distanţa dintre mijloacele segmentelor AB şi AC.

85. Fie A, B, C şi D puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = CD$. Fie M mijlocul segmentului AB, P mijlocul lui BC, iar Q este simetricul punctului M faţă de punctul P. Arătaţi că Q este mijlocul segmentului CD.

TESTE RECAPITULATIVE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Subiectul I. *Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.*

(1p) **1.** Soluţia ecuaţiei $x + 3 = 4$ este numărul natural:
a) 1; b) 2; c) 0; d) 4.

(1p) **2.** Suma primelor patru cele mai mici numere prime este egală cu:
a) 11; b) 16; c) 17; d) 24.

(1p) **3.** Calculând $\frac{2}{7}$ din 42 kg, rezultatul este:
a) 14 kg; b) 16 kg; c) 24 kg; d) 12 kg.

(1p) **4.** Scrierea sub formă zecimală a fracţiei $\frac{5981}{1000}$ este:
a) 59,81; b) 5,981; c) 598,1; d) 5981.

(1p) **5.** Lungimea segmentului AB este 8 cm, iar M este mijlocul segmentului. Lungimea segmentului BM este:
a) 6 cm; b) 2 cm; c) 4 cm; d) 8 cm.

Subiectul al II-lea. *Scrieţi rezolvările complete.*

1. Fie numerele naturale $a = \left(3^3 \cdot 81^2 \cdot 3 \cdot 3^3\right)^3 : 3^{15}$ şi $b = \left[\left(2^6 \cdot 2^2\right)^4 : 2^2 : 2^{15}\right]^3$.

(1p) **a)** Demonstraţi că $a = 3^{30}$.

(1p) **b)** Comparaţi numerele a şi b.

2. Maia a cumpărat o carte ale cărei pagini au fost numerotate în mod ciudat: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, …, 484, 486, 487.

(1p) **a)** Are această carte o pagină numerotată cu 100?

(1p) **b)** Câte file are cartea cumpărată de Maia?

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

TESTE INIŢIALE

Testul 1. **1.** 8. **2.** 20 lei. **3.** 60 cm. **4.** 18 + 29 = 47. **5.** 18°C. **6.** 8 biscuiţi. **7.** 50 g.
Testul 2. **1.** 240. **2.** 592. **3.** 19. **4.** Da, Mihai a calculat corect durata tratamentului. **5.** 200 de timbre. **6.** 7 lei. **7.** 20 de lalele, 18 garoafe şi 15 trandafiri.
Testul 3. **1.** $x = 5$. **2.** 30. **3.** 72 m. **4.** 41. **5.** 114 + 141 + 411 + 122 + 212 + 221 = 1221. **6.** 30 caise. **7.** 13 nuci şi 21 de nuci.

NUMERE NATURALE
CAPITOLUL I. OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

I.1. Scrierea şi citirea numerelor naturale

1. a) 24; b) 19; c) 405; d) 816; e) 333; f) 1004; g) 5810; h) 7348. **2.** a) 30413; b) 15243; c) 608806; d) 4607000; e) 13906102; f) 900000909. **3.** a) şapte; b) nouăsprezece; c) patruzeci şi trei; d) o sută nouă; e) trei sute zece; f) nouă sute douăzeci şi cinci. **4.** a) o mie trei sute şapte; b) nouăzeci şi trei de mii doi; c) douăzeci şi şapte de mii patru sute treisprezece; d) o sută douăzeci şi trei de mii trei sute douăzeci şi unu; e) patru milioane trei sute nouă mii cinci; f) douăzeci şi opt de milioane opt mii două sute. **5.** Numerele căutate sunt de forma $\overline{ab}$ cu $b = 2 \cdot a$, iar soluţiile problemei sunt 12, 24, 36 şi 48. **6.** De exemplu, 11, 20, 200, 1001, 10001. **7.** De exemplu, 111, 201, 1011, 1101, 2001. **8.** a) $27 = 2 \cdot 10 + 7$; b) $135 = 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$; c) $9148 = 9 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$; d) $12043 = 1 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 10 + 3$. **9.** a) $\overline{aa} = 10 \cdot a + a = 11a$; b) $\overline{abab} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b = 1010 \cdot a + 101 \cdot b$; c) $\overline{x0yx} = x \cdot 1000 + y \cdot 10 + x = 1001 \cdot x + 10 \cdot y$; d) $\overline{xyyx} = x \cdot 1000 + y \cdot 100 + y \cdot 10 + x = 1001 \cdot x + 110 \cdot y$; e) $\overline{2a3a1} = 2 \cdot 10000 + a \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + a \cdot 10 + 1 = 20301 + 1010 \cdot a$; f) $\overline{1bb20} = 1 \cdot 10000 + b \cdot 1000 + b \cdot 100 + 2 \cdot 10 = 10020 + 1100 \cdot b$. **10.** a) 35; b) 407; c) 930; d) 50701; e) 45323; f) 17709. **11.** 20, 24, 26, 28, 40, 42, 46, 48, 60, 62, 64, 68, 80, 82, 84 şi 86. **12.** a) 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33; b) 78, 79, 87, 89, 97 şi 98. **13.** 100, 101, 110, 112, 121, 122, 200, 202, 211, 212, 220, 221. **14.** Numerele căutate sunt de forma $\overline{8x0}$ cu $x \neq 0$ şi $x \neq 8$ sau $\overline{9y1}$ cu $y \neq 1$ şi $y \neq 9$. Astfel, am obţinut soluţiile: 810, 820, 830, 840, 850, 860, 870, 890, 901, 921, 931, 941, 951, 961, 971 şi 981. **15.** Numerele căutate sunt de forma $\overline{a0c9}$ cu $c = 2 \cdot a$. Obţinem soluţiile: 1029, 2049, 3069 şi 4089. **16.** Numerele sunt de forma $\overline{6abc}$ cu $a = b + c$ şi $b > 6$. Dacă $b = 7$, atunci c este cel mult 2, deoarece $b + c \leq 9$. Dacă $b = 8$, atunci $c = 0$ sau $c = 1$, iar dacă $b = 9$, atunci $c = 0$. Numerele obţinute sunt: 6770, 6871, 6972, 6880, 6981, 6990. **17.** 21, 173, 8321, 40102, 333111, 710017. **18.** Numerele căutate sunt de forma $\overline{aba}$ cu $a + b + a = 4$ şi $a \neq 0$, de unde $2a + b = 4$. Este necesar ca b să fie cifră pară; atunci $b = 0$, $a = 2$ sau $b = 2$, $a = 1$, iar soluţiile problemei sunt numerele 202 şi 121. **19.** 1B, 2E, 3A, 4F, 5D, 6C. **20.** Numerele naturale cuprinse între 432 şi 531 au cifra sutelor 4 sau 5, deci cifra 3 nu se va regăsi pe poziţia exerciţii, iar Carmen a rezolvat 30 de exerciţii. **24.** $a = (3^3)^{40} = 3^{120}$, iar $b = (90 : 30)^{123} = 3^{123}$, de unde $a < b$. **25.** $3^n \cdot 7^n \cdot (15 \cdot 3^2 - 8 \cdot 7) : 79 = 441$, de unde $3^n \cdot 7^n = 21^2$, deci $n = 2$.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1. **1.** a) 0; b) 1; c) 8; d) 9. **2.** a) 45; b) 50. **3.** 8. **4.** a) $x < y$; b) $x > y$. **5.** $n = 31$. **6.** $x = 66$. **7.** $a = 100 = 10^2$.

Testul 2. **1.** a) 15; b) 4; c) 2; d) 5. **2.** $x = 9$. **3.** $a = 2 \cdot 3^3 \cdot (2^5 \cdot 3^5) = 2^6 \cdot 3^8 = (2^3 \cdot 3^4)^2$, deci a este pătrat perfect. **4.** a) $x = 3^{20} = 9^{10} > 8^{10} = 2^{30} = y$; b) $x = 3^{120} = y$. **5.** $39_{(10)} = 100111_{(2)}$. **6.** $a = 2\underbrace{00...0}_{20\text{ de zerouri}} - 1 = 1\underbrace{99...9}_{20\text{ de cifre}}$, deci suma cifrelor lui a este egală cu $1 + 20 \cdot 9 = 181$. **7.** $a = 2^{2n+3} + 3 \cdot 2^{2n} - 2^{2n+1} = 2^{2n}(2^3 + 3 - 2) = 9 \cdot 2^{2n}$; restul împărţirii lui a la 9 este egal cu 0.

CAPITOLUL II. METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

II.1. Metoda reducerii la unitate

1. a) 10 metri; b) 6 bluze. **2.** a) 60 probleme; b) 5 zile. **3.** a) 125 litri; b) 8 kg. **4.** A – 3; B – 9; D – 8; E – 10. **5.** 80 lei. **6.** 11 butuci. **7.** a) 20 zile; b) 40 muncitori. **8.** A – 9; B – 12; C – 6; E – 3. **9.** 4 minute. **10.** 5 minute. **11.** 40 minute. **12.** În 10 ore, adică 600 minute, un cal termină fânul din 5 iesle, iar un mânz pe cel din 2 iesle, deci doi cai şi un mânz vor termina 12 iesle. Pentru o iesle, vor avea nevoie de 600 : 12 = 50 minute. **13.** Un pătrat cu latura de 200 m este format din patru pătrate cu latura de 100 m, în timp ce unul cu latura de 300 m este format din 9 asemenea pătrate. Tractoristul va primi (1800 : 4) · 9 = 4050 lei. **14.** Pentru a însămânţa 18 hectare, un utilaj ar avea nevoie de 36 de zile, aşadar un utilaj însămânţează 1 hectar în 2 zile. Pentru 28 de hectare, un utilaj ar avea nevoie de 56 de zile, deci treaba poate fi făcută în 7 zile de 8 utilaje. **15.** Calistrat lucrează 4 intervale de câte 4 ore, iar Hogaş 3 astfel de intervale. Fiecare asemenea interval este plătit cu 875 : 7 = 125 lei. Calistrat va primi 500 lei, iar Hogaş 375 lei.

II.2. Metoda comparaţiei

1. 5 lei un caiet şi 3 lei un pix. **2.** 95 kg. **3.** Cu 20 kg. **4.** 9 lei, respectiv 6 lei. **5.** 97 lei. **6.** O prăjitură costă 8 lei, o îngheţată 5 lei, iar Maria are de plătit 34 lei. **7.** 15 m. **8.** 391 lei. **9.** 12 nuci. **10.** 180 lei. **11.** O carte costă 48 lei, un caiet costă 32 lei, iar Daria are de plătit 336 lei. **12.** Porţia zilnică a unei ţestoase adult este de 30 de creveţi, iar a unui pui este de 10 creveţi. Într-o săptămână, porţia adultului depăşeşte cu 140 de creveţi porţia unui pui. **13.** Un bilet la operă costă 61 lei, iar un bilet la cinema costă 27 lei. **14.** 69 minute. **15.** 1680 kg.

II.3. Metoda figurativă

1. Radu a colecţionat 32 de timbre, iar Simona 96 de timbre. **2.** 8 grile şi 40 de exerciţii cu răspuns aşteptat. **3.** Fiul are 25 de ani, mama are 53 de ani. **4.** Ioana are 54 lei, iar Daniel are 162 lei. **5.** 25. **6.** 296. **7.** 36 de pagini în prima zi, 72 de pagini a doua zi, 216 pagini a treia zi. **8.** În prima sală sunt 270 de locuri, în a doua sală sunt 90 de locuri, iar în a treia sală sunt

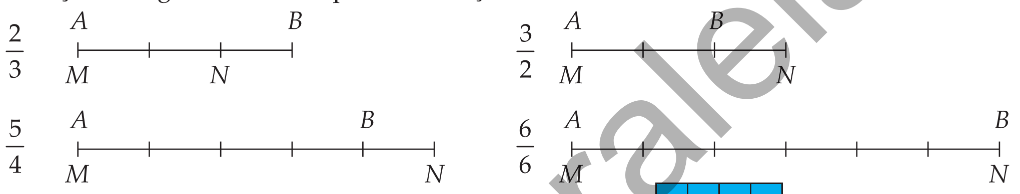
Testul 2. **1.** a) 18 şi 36; b) 18, 36, 45, 51 şi 75; c) 45 şi 75; d) 18, 36 şi 45. **2.** a) 1; b) 0, 13, 26 şi 39; c) 1, 2, 3, 4, 6 şi 12; d) 72, 81 şi 90. **3.** $a = 3^5(3^2 + 5) = 3^5 \cdot 2 \cdot 7$; trei numere prime diferite care divid pe a sunt 2, 3 şi 7. **4.** $x = 1$ sau $x = 7$. **5.** $n = 270$ sau $n = 225$. **6.** 120, 122, 124, 126, 128 sunt compuse, pentru că îl au ca divizor propriu pe 2; $121 \vdots 11$, $123 \vdots 3$, $125 \vdots 5$ şi $129 \vdots 3$. **7.** Dacă n este numărul elevilor din clasă, atunci n este multiplu comun al numerelor 4, 6 şi 8. Multiplii lui 4 sunt: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, …, multiplii lui 6 sunt: 0, 6, 12, 18, 24, …, iar multiplii lui 8 sunt: 0, 8, 16, 24, … . Deci, numărul minim de elevi din clasă este 24.

FRACŢII ORDINARE. FRACŢII ZECIMALE

CAPITOLUL IV. FRACŢII ORDINARE

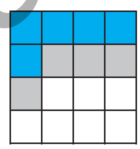
IV.1. Fracţii ordinare. Fracţii subunitare, echiunitare, supraunitare. Procente

1. a) $\frac{1}{8}, \frac{12}{8}$; b) $\frac{6}{14}, \frac{12}{8}, \frac{9}{7}, \frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{11}{15}$. **2.** b) Notăm AB segmentul de lungime 6 cm şi MN segmentul care reprezintă fracţia indicată.



3. Împărţim pătratul în 16 pătrate cu latura de 1 cm.

Rămâne necolorată $\frac{7}{16}$ din suprafaţa pătratului.



4. a) De exemplu: $\frac{5}{7}, \frac{5}{15}, \frac{5}{3}$; b) De exemplu: $\frac{3}{8}, \frac{11}{8}, \frac{17}{8}$; c) De exemplu: $\frac{6}{5}, \frac{18}{15}, \frac{9}{25}$. **5.** a) 2; b) 4; c) 200. **6.** a) 64; b) 15; c) 15. **7.** a) 25; b) 5; c) 8; d) 10; e) 4; f) 250. **8.** a) 8%; b) 23%; c) 11%; d) 143%; e) 180%; f) 200%. **9.** a) $\frac{2}{100}$; b) $\frac{50}{100}$; c) $\frac{10}{100}$; d) $\frac{20}{100}$; e) $\frac{100}{100}$; f) $\frac{150}{100}$. **10.** a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{7}$; b) $\frac{3}{3}$; c) Sunt două fracţii supraunitare. **11.** d). **12.** a) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}$; b) $\frac{1}{1}, \frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}$; c) $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{6}{4}, \frac{8}{2}, \frac{8}{4}, \frac{8}{6}$. **13.** a) 5; b) 17; c) 1; d) 2; e) 5; f) 5. **14.** a) 0, 1, 2; b) 0, 1, 2, 3; c) 0, 1, 2; d) 1, 2, 3; e) 5, 6, 7, …; f) 6, 7, 8, … . **15.** a) 1, 2; b) 1, 2; c) 1; d) 4, 5, 6, …; e) 5, 6, 7, …; f) 251, 252, … . **16.** $\frac{16}{13}, \frac{36}{13}, \frac{16}{23}, \frac{36}{23}, \frac{16}{43}, \frac{36}{43}, \frac{16}{53}, \frac{36}{53}, \frac{16}{73}, \frac{36}{73}, \frac{16}{83}, \frac{36}{83}$. **17.** Fracţia $\frac{4}{x+y}$ este supraunitară dacă $x + y = 1$, $x + y = 2$ sau $x + y = 3$; $\overline{xy}$ poate fi 10, 20, 11, 30, 21, 12. **18.** a) $\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{3}{12}, \frac{4}{11}, \frac{5}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{8}$; b) $\frac{36}{1}, \frac{18}{2}, \frac{12}{3}, \frac{9}{4}$. **19.** a) Divizorii numărului 18 sunt: 1, 2, 3, 6, 9 şi 18, iar divizorii numărului 35 sunt: 1, 5, 7 şi 35. Fracţiile căutate sunt:

ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI. PUNCTE. DREPTE. PLANE

VI.1. Punct. Dreaptă. Plan

1. a) A; b) A; c) F. **2.** Prin punctul A trec o infinitate de drepte. **4.** AB, AC, AD, BC, BD, CD. **5.** a) F; b) A; c) A. **6.** a) A; b) F. **7.** În total, există 10 drepte. **8.** Există 12 semidrepte. **9.** Există 6 semidrepte: AB, BA, BC, CB, CD şi DA. **10.** a) o infinitate; b) o infinitate. **11.** AB, BC, CD şi DA sunt laturi; AC şi BD sunt diagonale. **12.** Primele cinci „cifre" sunt linii frânte deschise, iar ultima este linie frântă închisă. **13.** a) dreptele AB, BC, AC; b) semidreptele AB, BA, BC, CB, AC, CA; c) segmentele AB, BC, AC. **14.** a) segmentele BC, AC, BD şi AD; b) semidreptele AB, BC, CB şi DC. **15.** a) 4 drepte; b) 6 segmente. **16.** a) Există $99 + 98 + \ldots + 2 + 1 = 4950$ segmente; b) Există cel mult 4950 de drepte determinate de cele 100 de puncte. **17.** a) A şi B, A şi E, B şi E, C şi D; b) A şi C, A şi D, B şi C, B şi D, E şi C, E şi D. **18.** a) OD şi OF; dacă vom considera dreapta-frontieră ca făcând parte din semiplan, se adaugă OA şi OB; b) OB şi OE; dacă vom considera dreapta-frontieră ca făcând parte din semiplan, se adaugă OC şi OD. **19.** În figură sunt reprezentate 8 puncte, 12 segmente şi 6 plane. Evident, putem identifica şi alte puncte, segmente sau plane: de exemplu, segmentul AC nu este reprezentat în figură, dar el are capetele în două dintre punctele care apar în figură. **20.** În figură sunt reprezentate 5 puncte, 8 segmente şi 5 plane.

VI.2. Poziţiile relative ale unui punct faţă de o dreaptă. Poziţiile relative a două drepte

1. a) A, B şi E; b) B, D şi E; c) A, B, E, respectiv B, C, D. **3.** a) E este punctul comun al dreptelor AC şi BD; problema are soluţie unică; b) F poate fi oricare punct al dreptei AC, diferit de punctul E; problema are o infinitate de soluţii. **4.** a) $a \parallel b$ şi $c \parallel d$; b) a şi c sunt concurente în M; b şi c sunt concurente în N; b şi d sunt concurente în P; a şi d sunt concurente în Q. **5.** a) De exemplu, CD şi EF, respectiv AE şi BF; b) De exemplu, AE, AD şi BC, respectiv AD, CD şi GH. **8.** a) A; b) F. **9.** Numărul minim de drepte se obţine când nouă dintre puncte sunt coliniare (să presupunem că acestea sunt B, C, …, J), iar al zecelea (A) nu se află pe dreapta BC. În acest caz, cele zece puncte determină zece drepte: AB, AC, …, AJ şi BC. **10.** Numărul maxim de drepte determinate de cele zece puncte se obţine atunci când ele sunt, oricare trei, necoliniare şi este egal cu $9 + 8 + \ldots + 2 + 1 = 45$. Dacă înlocuim trei puncte necoliniare (care determină trei drepte) cu trei puncte coliniare, numărul dreptelor scade cu $3 - 1 = 2$ şi, de aici, rezultă concluzia problemei.

VI.3. Lungimea unui segment. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct faţă de alt punct

1. $AC < BC < AB$. **3.** $AB > AD$, $CD < AC$, $DO = OC$, $AD = BC$, $AC = BD$. **5.** Putem găsi o infinitate de puncte, care formează un cerc. **6.** Două puncte O (pe care le vom determina folosind compasul), un singur punct M şi niciun punct N. **7.** Instrumentul potrivit pentru realizarea acestor desene este compasul. Observăm că: a) A, B, C sunt vârfuri ale unui triunghi; b) A, B, C sunt coliniare, cu C între A şi B; c) A, B, C sunt coliniare, cu A între B şi C; d) nu există puncte A, B, C cu proprietăţile date. **8.** Cele două triunghiuri pot fi suprapuse perfect (sunt congruente). **9.** Cele patru puncte sunt situate ca în figura 1. Lungimea segmentului AC este aproximativ egală cu 8,7 cm. **10.** Cum $AB + BD = AD$ şi $BD + DC = BC$, înseamnă că cele patru puncte sunt coliniare, în ordinea

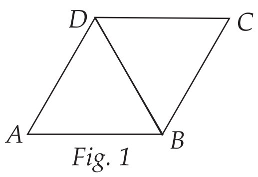


Fig. 1